孟 杰 刘用麟 著

BCI-代数引论

AN INTRODUCTION TO BCI-ALGEBRAS

陕西科学技术出版社

● 责任编辑　赵生久　● 封面设计　郑晓都

内容提要

本书共六章：一、BCI-代数的基本概念和一般理论；二、p-半单BCI-代数，正定关联BCI-代数，拟可换BCI-代数等9种特殊类型的BCI-代数；三、BCI-代数的理想理论，包括闭理想，p-理想，可换理想，固执理想等13种特殊类型的理想；四、BCI-代数的p-半单部分和结合部分，讨论p-半单部分成为理想的各种条件，由此引入了KL-积BCI-代数的概念；五、给出BCI-代数的若干扩张方法，列出了3~6阶真BCI-代数一览表，以备读者查阅；六、逻辑代数的一个综述。



ISBN 7-5369-3243-X/O·127
定价：22.00元

BCI-代数引论

An Introduction to BCI-algebras

孟　杰　刘用麟　著
Jie Meng, Young Lin Liu

陕 西 科 学 技 术 出 版 社
Shaanxi Scientific and Technological Press
2001. 7.　Xian

图书在版编目(CIP)数据

BCI-代数引论/孟杰,刘用麟著.—西安:陕西科学技术出版社,2001.7
ISBN 7—5369—3243—X
I.B… Ⅱ.①孟…②刘… Ⅲ.布尔代数—概论 Ⅳ.0153.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 24468 号

AMS Subject Classifications:03G25 06F35 06A11

BCI-代数引论

作　　者 孟　杰　刘用麟著
责任编辑 赵生久

出 版 者 陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号　邮编 710003
电话(029)7212206　7260001
发 行 者 陕西科学技术出版社
印　　刷 西安百花印刷厂
规　　格 850mm×1168mm　1/32 开本
印　　张 11.25 印张
字　　数 273 千字
印　　数 1～1000 册

版　　次 2001 年 7 月第 1 版
2001 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN7-5369-3243-X/O・127
定　　价 22.00 元

序　言

BCK-代数和BCI-代数是20世纪60年代日本数学家K. Iséki提出的两类抽象代数，它们是组合逻辑中BCK-系统和BCI-系统的代数表述。从序的观点看，BCK-代数和BCI-代数的本质差别在于：在BCK-代数中元素0是最小元，而在BCI-代数中元素0是极小元；反映在定义中，BCK-代数满足条件 $0*x=0$，而BCI-代数不满足这个条件。恰恰是这一点，给BCI-代数的研究带来了极大的困难，直到1979年连一个真BCI-代数（即是BCI-代数但不是BCK-代数）的例子也未找到。从1980年到1985年有三篇文章打破了BCI-代数研究的困境。首先是K. Iséki[7]，他用给BCK-代数添加一点的办法构造了真BCI-代数，在本书中我们称这个办法为“一点扩张”。其次是胡庆平和K. Iséki（井关清志）[1]，引入了结合BCI-代数的概念，并证明了这类代数等价于对合群。一个代数是结合的当且仅当它满足条件 $0*x=x$。受到这一结果的启发，雷天德（T. D. Lei）[2]引入了广义结合BCI-代数，即满足条件 $0*(0*x)=x$ 的BCI-代数。该文扩充后同年由T. D. Lei and C. C. Xi[1]以“p-radical in BCI-algebras”为题发表在Math. Japon. 30(1985)，511—517。在后一篇文章中，他们称广义结合BCI-代数为 p-semisimple BCI-algebras。雷天德教授还证明了 p-semisimple BCI-algebras等价于Abel-群。从此以后，众多学者对BCI-代数进行了广泛的研究，取得了许多有趣结果，引起国际学术界的重视。美国数学会编辑的“Math. Reviews”和欧洲数学会等编辑的“Zentralblatt MATH”的Math. Subject Classification 1991和2000专门列入条目“06F35 BCK-algebras, BCI-algebras”，美国科技情报所（Institute for Scientific Information，简称ISI）的科学引

文索引(Science Citation Index 简称 SCI)经常检索这方面文章。

中国的研究者们对 BCK-代数和 BCI-代数的发展做出了突出的贡献,先后出版了有关 BCK-代数和 BCI-代数的专著和油印讲义:

雷天德,蒲义书:BCK-代数和 BCI-代数(铅印本),1983 年。

陈昭木:BCK-代数和 BCI-代数(油印本),福建师范大学数学系,1983 年。

雷天德:BCI-代数(油印讲义),陕西师范大学数学系,1984 年。

胡庆平:BCI-代数,陕西科学技术出版社,1987 年。

孟　杰:BCK-代数讲义(油印本),西北大学数学系,1990 年。

J. Meng and Y. B. Jun: BCK-algebras, Kyung Moon Sa, Seoul, 1994.

以上著作的出版,推动了 BCK-代数和 BCI-代数研究的普及和深入。

本书专门讲述 BCI-代数的理论。有关 BCK-代数的知识,可以参考上述著作,特别是 J. Meng and Y. B. Jun 的专著“BCK-algebras”。

在第 1 章,我们介绍了 BCI-代数的一般理论。读者应当仔细研读节 1.3,原子和分支的知识是 BCI-代数的基本概念和基本工具。

第 2 章介绍了九类特殊的 BCI-代数。其中节 2.4～节 2.9 的基本想法是把 BCK-代数中的有关概念推广到 BCI-代数中。具有条件(S)的 BCI-代数和拟可换 BCI-代数的引入形式上完全与相应的 BCK-代数相同,没有遇到困难。但是可换(正定关联,关联)BCI-代数的提出,遇到了较大的困难。原因是满足可换(正定关联,关联)BCK-代数定义中相应恒等式的 BCI-代数必是 BCK-代数。因此,要引入可换(正定关联,关联)BCI-代数,就必须寻找新

的条件。这里要遵循三条原则：一是存在真 BCI-代数满足这样的条件；二是可换(正定关联，关联)BCK-代数满足这样的条件；三是可换(正定关联，关联)BCI-代数尽可能多地保留相应 BCK-代数的性质。这件工作由孟杰，辛小龙[2]，[4]，[5]和 M. A. Chandhry [1]，[2]较好地完成了。

BCI-代数研究的重点之一就是它的理想理论。在第 3 章，我们介绍了 13 种特殊类型的理想。为了用理想去刻划特殊类型的 BCI-代数，提出了结合理想，拟结合理想，p-理想，正定关联理想，可换理想和关联理想。BCI-代数的理想和 BCK-代数的理想定义形式尽管相同，但却存在本质的差别：BCK-代数的理想必是子代数，但 BCI-代数的理想可能不是子代数。由此产生了闭理想，强理想，(*)-理想和 Nil-理想的研究。

第 4 章重点讨论了 BCI-代数的 p-半单部分 $L(X)$和结合部分 $G(X)$成为理想的条件，由此自然引入了 KL-积 BCI-代数的概念。

在第 5 章，介绍了 BCI-代数的几种扩张方法。在节 5.3 给出了 3～6 阶真 BCI-代数一览表，可供读者利用。

自从布尔代数诞生以来，用代数方法研究逻辑问题受到数学家的重视，从而产生了各种各样的代数系统。这些代数系统被称为逻辑代数。有关逻辑代数之间关系的研究，分散在各种文献中。在第 6 章，我们综述了 30 多种逻辑代数的关系，发现一个重要结论：BCK/BCI-代数是处理逻辑代数的一个统一框架。

BCI-代数的内容相当丰富，它与数理逻辑，抽象代数，拓扑学和模糊数学等有广泛联系，在这样一本小册子里不可能对它作全面介绍。本书内容的选择完全由作者的研究兴趣决定。为了弥补这一不足，我们列出了尽可能详细的参考文献。

1999～2000 学年度，刘用麟副教授作为访问学者在西北大学进修，与孟杰教授合作完成了本书初稿的写作。孟杰负责第 1 章，第 2 章和第 3 章节 1～9 的写作，刘用麟负责其余部分的写作，最

后由孟杰统稿修改。

在本书写作过程中，我们得到各方人士的帮助，在此表示衷心的感谢。我们衷心感谢日本的 K. Iséki 教授和 S. Tanaka 教授，巴西的 J. M. Abe 教授，香港的岑嘉评教授，沙特的 A. B. Thaheem 教授。他们为作者及时提供了宝贵资料。衷心感谢多年与作者进行学术交流的雷天德教授，陈昭木教授，蒲义书教授，沈百英教授，胡庆平教授，姜豪教授，张群教授，朱怡权教授，黄益生教授，黄文平和张小红副教授。特别感谢我们的研究合作者 Young Bae Jun 教授，Hee Sik Kim 教授，辛小龙副教授和魏仕民教授。

本书第二作者感谢南平师专领导的大力支持和关心。

陕西省建筑科学研究设计院周蓉女士优良的打字排版为本书增色不少，在此表示衷心的感谢。另外也感谢陕西科学技术出版社编辑赵生久先生为本书出版付出的辛勤劳动。最后，感谢西北大学外语学院樊恒夫教授的大力帮助。

作　者

2001 年 1 月

Preface

BCK-algebras and BCI-algebras are two classes of the abstract algebras which were introduced by the Japanese mathematician Kiyoshi Iséki in 1960's, and they are algebraic formulations of BCK-system and BCI-system in the combinatory logic. From the point of view of ordering, the essential difference between BCK-algebras and BCI-algebras lies in the following: Element 0 is the least element in BCK-algebras, while it is a minimal element in BCI-algebras; as expressed in definitions, BCK-algebras satisfy the condition $0 * x = 0$ while BCI-algebras do not. This, and this alone, posed great difficulties to the exporation of BCK-algebras. So by 1979, when BCK-algebras had secured remarkable progress, BCI-algebras had made little substantial headway, not even a proper BCI-algebra sample (meaning BCI-algebras and not BCK-algebras) had yet been found. Starting from 1980, studies saw a real big advance and many attractive achievements, which aroused international attention in the field: The "(AMS) Mathematics Subject Classification 1991" edited by the American Mathematical Society and the "(Zentralblatt MATH) Mathematics Subject Classification 2000" edited by the European Mathematical Society have special entry the item" 06F35 BCK-algebras, BCI-algebras", and reseach papers in this field are often indexed by the Science Citation Index (SCI) of the U. S. Institute for Scientific Information (ISI).

Chinese researchers have made outstanding contributions to

the development of BCK-algebras and BCI-algebras and published a great number of articles on BCK-algebras and BCI-algebras in international journals of mathematics.

This book deals with the theory of BCI-algebras. For the details on BCK-algebras we refer to "BCK-ALGEBRAS, Kyung Moon Sa Co. , Seoul, 1994" by J. Meng and Y. B. Jun.

Chapter 1 contains the basics of general theory of BCI-algebras, which apply to all classes of BCI-algebras. The theory on atoms and branchs of BCI-algebras is of the basic concepts and tools, and for a better mastery of this knowledge, readers ought to read section 1. 3 carefully.

In Chapter 2 we discussed nine special classes of BCI-algebras. Of these, sections 2. 4～2. 9 depict the basic ideas meant to generalize the concepts related to BCK-algebras into BCI-algebras. The forms of the defitions of BCI-algebras with conditions (S) and quasicommutative BCI-algebras are completely the same as those of corresponding BCK-algebras, respectively, and there were no difficulties ever found in the process. But great difficulties were met with in introducing definitions of commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras. The reason is that the BCI-algebras satisfying the corresponding identities in definitions of commutative (resp. positive implicative, implicative)BCK-algebras must be the BCK-algebras. Therefore, new conditions must be sought in order to introduce commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras. Here three principles are to be followed: (1) there exist proper BCI-algebras to satisfy such conditions; (2) the commutative (resp. positive implicative, implicative) BCK-algebras satisfy such conditions; and

(3) the commutative (resp. positive implicative, implicative) BCI-algebras keep as much properties as possible of corresponding BCK-algebras. This work has been fairly well done by J. Meng and X. L. Xin [2],[4],[5], and M. A. Chaudhry [1],[2].

One of the emphases for BCI-algebra studies is its ideal theory. In Chapter 3, we have explained 13 special classes of ideals. To characterize special classes of BCI-algebras by ideals, reseachers have introdeuced the concepts of associative ideals, quasiassociative ideals, p-ideals, positive implicative ideals, commutative ideals and implicative ideals. While the definition of ideals in BCI-algebras and one in BCK-algebras are remain the same, there still exists the following qualitative difference: ideals of BCK-algebras have to be subalgebras but ideals of BCI-algebras might not one. Hence research of closed ideals, strong ideals, (*)-ideals and Nil-ideals is necessary.

Chapter 4 focuses the discussion on the condition for the p-semisimple part $L(X)$ (resp. the associative part $G(X)$) of a BCI-algebra X to be an ideal of X, and by the way the concept of KL-product BCI-algebras is introduced.

Several ways of BCI-algebra extension are suggested in Chapter 5. A table of proper BCI-algebras of orders 3—6 is provided in section 5. 3 for reader's reference.

Ever since the birth of Boolean algebras, due attenttion has been given by mathematicians to the study of logic problems by using algebraic methods, and therefore various algebraic systems have come into being. These algebraic systems are called logic algebras. And the investigation of the connections among logic algebras can be found scattered in many kinds of literatures. In

Chapter 6, we have given a survey of the connections among 30 more classes of logic algebras and have an important discovery: BCK/BCI-algebras constitute a unifying framework for treatment of logic algebras.

BCI-algebras has very rich connotations and is widely connected with mathematical logics, abstract algebras, topologies, fuzzy mathematics, and so on. This book, limited for its size, cannot deal with it more comprehensively. The choice of topics of this book most certainly reflects the authors' interests.

Jie Meng
Department of Mathematics
Northwest University
Xian 710069
People's Republic of China

Yong Lin Liu
Department of Mathematics
Nanping Teachers College
Nanping 353000, Fujian
People's Republic of China

January 2001

目　录

第 1 章　一般理论

1.1　基本性质

本节将给出 BCI- 代数的基本性质.

定义 1.1.1　一个(2,0)型的代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做 BCI- 代数，如果它满足：

BCI-1　$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

BCI-2　$(x * (x * y)) * y = 0$;

BCI-3　$x * x = 0$;

BCI-4　$x * y = y * x = 0$ 蕴涵 $x = y$.

如果规定 $x \leqslant y$ 当且仅当 $x * y = 0$,上述公理也可写为

$(x * y) * (x * z) \leqslant z * y$;

$x * (x * y) \leqslant y$;

$x \leqslant x$;

$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 蕴涵 $x = y$.

注 1　BCK- 代数是 BCI- 代数公理系中增加公理 $0 * x = 0$ 而成. 所以 BCK- 代数必是 BCI- 代数.

例 1.1.1　$X = \{0,1\}$, $*$ 运算如下表

*	0	1
0	0	1
1	1	0

容易验证$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数.由于$0 * 1 = 1 \neq 0$,所以它不是BCK-代数.

注 2 此例说明BCK-代数类是BCI-代数类的一个真子类.今后我们称一个不是BCK-代数的BCI-代数为真BCI-代数.

定理 1.1.1 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数,则$\forall x \in X$,$x * 0 = 0$蕴涵$x = 0$(即$x \leqslant 0$蕴涵$x = 0$,这表明0是一个极小元).

证明 设$x * 0 = 0$.由BCI-3和BCI-2得

$$0 * x = (x * 0) * x = (x * (x * x)) * x = 0,$$

此式与$x * 0 = 0$结合,利用BCI-4得$x = 0$. □

注 3 K. Iséki[2]所给BCI-代数的公理系统是BCI-1～BCI-4和$x * 0 = 0$蕴涵$x = 0$.杭州大学姜豪首先证明了定理1.1.1,表明K. Iséki的公理系统是不独立的.这一重要结果于1985年发表在姜豪,田正平[1]中.

关于BCI-代数的一般性质,有下述

定理 1.1.2 假设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数,下列结论成立:

(i) 若$x \leqslant y$,则$z * y \leqslant z * x$;

(ii)　若 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$；

(iii)　$(x * y) * z = (x * z) * y$；

(iv)　$(x * z) * (y * z) \leqslant x * y$；

(v)　$x \leqslant y$ 蕴涵 $x * z \leqslant y * z$ 和 $z * y \leqslant z * x$；

(vi)　$x * 0 = x$.

证明　设 $x \leqslant y$，则

$$(z * y) * (z * x) \leqslant (x * y) = 0,$$

所以 $z * y \leqslant z * x$. (i) 成立.

如果 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$，那么由(i) 得 $x * z \leqslant x * y$. 再由 $x \leqslant y$ 得 $x * y = 0$，于是 $x * z \leqslant 0$. 所以 $x \leqslant z$. 这就证明了，$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$ 蕴涵 $x \leqslant z$. (ii) 成立.

因为 $x * (x * z) \leqslant z$，由(i) 得

$$(x * y) * z \leqslant (x * y) * (x * (x * z)) \leqslant (x * z) * y.$$

相反的不等式由交换 y 和 z 的位置可得. 所以

$$(x * y) * z = (x * z) * y.$$

(iii) 成立.

由 BCI-1 和(iii) 得

$$\begin{aligned} &((x * z) * (y * z)) * (x * y) \\ =\ &((x * z) * (x * y)) * (y * z) \\ =\ &0, \end{aligned}$$

所以$(x * z) * (y * z) \leqslant x * y$. (iv) 成立.

由(iii) 和(iv) 直接得(v).

因为 $x * (x * 0) \leqslant 0$，所以 $x \leqslant x * 0$. 相反地，由(iii) 和 BCI-3，我们有

$$(x * 0) * x = (x * x) * 0 = 0 * 0 = 0,$$

因此 $x * 0 \leqslant 0$. 所以 $x = x * 0$. (iv) 成立. □

注 4 BCI-3,BCI-4 和(2)表明 $\leqslant$ 是一个偏序,称为 BCI-序.

定理 1.1.3 若 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数,则对任意 $x,y\in X$,恒有

$$x*(x*(x*y))=x*y.$$

证明 由 BCI-2 得

$$x*(x*(x*y))\leqslant x*y.$$

另一方面,由 BCI-1 得

$$(x*y)*(x*(x*(x*y)))\leqslant(x*(x*y))*y=0.$$

由 BCI-4 得

$$x*(x*(x*y))=x*y. \qquad \square$$

定理 1.1.4(C. C. Xi[1]) 若 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数,则对任意 $x,y\in X$,恒有

$$0*(x*y)=(0*x)*(0*y).$$

证明 由 BCI-3 和定理 1.1.2(iii) 有

$$\begin{aligned}(0*x)*(0*y)&=\{[(x*y)*(x*y)]*x\}*(0*y)\\&=[(0*y)*(x*y)]*(0*y)\\&=0*(x*y).\end{aligned} \qquad \square$$

记号 对于自然数 n,归纳地定义 $x*^{n}y$ 为

$$x*^{1}y=x*y,\ x*^{n+1}y=x*(x*^{n}y).$$

定理 1.1.5 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数. 则对任意 $x,y\in X$ 和自然数 n,

(i) 当 n 为奇数时,$x*^{n}y=x*y$;

(ii)　当 n 为偶数时，$x *^n y = x * (x * y)$.

证明　由定理 1.1.3 和归纳法容易证明，故略. □

李会师给出了 BCI- 代数一组简化公理系统.

定理 1.1.6(H. S. Li[1])　一个 (2,0) 型代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是 BCI- 代数当且仅当它满足

BCI-1　$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

(i)　$x * 0 = x$;

BCI-4　$x * y = y * x = 0$ 蕴涵 $x = y$.

证明　必要性是平凡的，仅证充分性. 在 BCI-1 中，令 $y = z = 0$，由 (i) 得 $x * x = 0$，BCI-3 成立. 在 BCI-1 中令 $y = 0$，由 (i) 得 $(x * (x * z)) * z = 0$，BCI-2 成立. 所以 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. □

下面给出一些例子.

例 1.1.2　$X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 运算表如下

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数.

例 1.1.3　对于任一个集合 X，$P(X)$ 表示其幂集，"$\dot{-}$" 是

$P(X)$ 上的对称差运算：

$$A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A),$$

则 $\langle P(X); \dot{-}, \varnothing \rangle$ 是一个 BCI- 代数(胡庆平[1]).

例 1.1.4 $R(X)$ 表示 X 上一切实连续函数 $f(x)$ 的集合，则 $\langle R(X); -, 0 \rangle$ 是一个 BCI- 代数.

例 1.1.5 $X = \{0, 1, a\}$，$*$ 运算如下：

$*$	0	1	a
0	0	0	a
1	1	0	a
a	a	a	0

则 $\langle X; *, 0 \rangle$ 是一个 BCI- 代数，而且是真 BCI- 代数，因为 $0 \not\leq a$. (K. Iséki[3])

这个例子是下述定理的一个特殊情形.

定理 1.1.7(K. Iséki[3]). 假设 $\langle X; *, 0 \rangle$ 是一个 BCK- 代数，$a \notin X$，对任意 $x \in X$，定义

$$x * a = a * x = a, a * a = 0.$$

则 $\langle X \cup \{a\}; *, 0 \rangle$ 是一个真 BCI- 代数.

证明 BCI-4 和 $x * 0 = x$ 显然成立. 根据定理 1.1.5，仅需证 BCI-1. 分以下几种情形：

(1) $x = a$, $y = a$, $z = a$，此时

$$(a * a) * (a * a) = 0 * 0 = 0 \leqslant a * a = 0;$$

(2) $x = a$, $y = a$, $z \in X$，此时

$$(a * a) * (a * z) = 0 * a = a \leqslant a = z * a;$$

(3)　$x = a$, $y \in X$, $z \in X$,此时

$(a * y) * (a * z) = a * a = 0 \leqslant z * y$;

(4)　$x = a$, $y \in X$, $z = a$,此时

$(a * y) * (a * a) = a * 0 = a \leqslant a = a * y$;

(5)　$x \in X$, $y = a$, $z = a$,此时

$(x * a) * (x * a) = a * a = 0 \leqslant 0 = a * a$;

(6)　$x \in X$, $y \in X$, $z = a$,此时

$(x * y) * (x * a) = (x * y) * a = a \leqslant a = a * y$;

(7)　$x \in X$, $y = a$, $z \in X$,此时

$(x * a) * (x * z) = a * (x * z) = a \leqslant a = z * a$;

(8)　$x \in X$, $y \in X$, $z \in X$,此时,因为 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCK- 代数,所以 $(x * y) * (x * z) \leqslant z * y$.

以上证明了 $\langle X \cup \{a\}; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数.

由于 $0 \not\leqslant a$,所以它还是一个真 BCI- 代数.　□

今后,称 $\langle X \cup \{a\}; *, 0\rangle$ 是 BCK- 代数 X 的一点扩张.

定义 1.1.2　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,X_0 是 X 的任一非空子集. 如果 $\forall\, x, y \in X_0$ 恒有 $x * y \in X_0$,则称 $\langle X_0; *, 0\rangle$ 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个子代数. 显然它也是一个 BCI- 代数且 $0 \in X_0$.

令 $B(X) = \{x \in X : 0 \leqslant x\}$. 若 $x, y \in B(X)$,则 $0 \leqslant x$ 和 $0 \leqslant y$,即 $0 * x = 0 * y = 0$. 由定理 1.1.4 得

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = 0 * 0 = 0$$

即 $0 \leqslant x * y$. 这表明 $x * y \in B(X)$. 因此 $B(X)$ 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个子代数. 同时 $\forall\, x \in B(X)$,均有 $0 \leqslant x$. 所以 $B(X)$ 还是一个 BCK- 代数. 总结上述结果得

定理 1.1.8(K. Iséki[3]) 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,则$\langle B(X);*,0\rangle$是它的一个最大BCK-子代数. □

我们称$B(X)$为$\langle X;*,0\rangle$的BCK-部分.

例 1.1.6 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,则$\{0\}$和X是它的两个子代数,称为平凡子代数.

例 1.1.7 在例1.1.5中,$\{0,1\}$是X的一个子代数,而且$B(X)=\{0,1\}$.而$S=\{0,a\}$也是一个子代数.注意S的阶不整除X的阶,说明在BCI-代数中,相应于群论中的拉格朗日定理不成立.

例 1.1.8 令Q^*表示一切非零有理数作成的集合.BCI-代数$\langle Q^*;\div,1\rangle$中所有正有理数作成的集合$Q^+$是$Q^*$的一个子代数.

现在,我们给出BCI-代数另一个一般性质.

定理 1.1.9 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数.则对任意$x,y\in X$恒有

$$0*(x*y)\leqslant y*x.$$

证明 由定理1.1.4

$$0*(x*y)=(0*x)*(0*y)\leqslant y*x.$$ □

定理 1.1.10 设X是一个BCI-代数.则$\forall\, x\in X$和$\forall\, y\in B(X)$,$x*y\leqslant x$.

证略. □

为了说明 BCI- 代数名称来源我们给出下述

定理 1.1.11(沈百英[1])　一个(2,0)型代数$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数当且仅当它满足:

B　$[(x*y)*(z*y)]*(x*z)=0$;

C　$[(x*y)*z]*[(x*z)*y]=0$;

I　$x*x=0$;

BCI-4　$x*y=0$ 和 $y*x=0$ 蕴涵 $x=y$.

证明　必要性是显然的,仅证充分性. 由于 **I** 即 BCI-3,只需证 BCI-1 和 BCI-2.

由 **C** 和 BCI-4 得

(1)　$(x*y)*z=(x*z)*y$.

由(1) 和 **I** 得

$$(x*(x*y))*y=(x*y)*(x*y)=0,$$

BCI-2 成立.

由(1) 和 **B** 得

$$\begin{aligned}&[(x*y)*(x*z)]*(z*y)\\=&[(x*y)*(z*y)]*(x*y)\\=&0,\end{aligned}$$

BCI-1 成立.

所以$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数. □

该定理中公理 **B**,**C**,**I** 分别对应于组合逻辑中的组合子

$\vdash F(F_{xy})(F(F_{zx})(F_{zy}))$ **B**

$\vdash F(F_x(F_{yz}))(F_y(F_{xz}))$ **C**

$\vdash F_{xx}\mathbf{I}$.

所以该定理说明与组合子 **B**,**C**,**I** 对应公理加上 BCI-4 组成 BCI- 代数的公理系统. 因此 BCI- 代数的名称来源于组合逻辑.

1.2 成为 BCK- 代数的条件

BCK- 代数有三种重要的特殊类型 —— 可换,正定关联和关联 BCK- 代数. 那么 BCI- 代数能否附加相应的条件构成特殊类型的真 BCI- 代数呢?回答是否定的.

定理 1.2.1(K. Iséki[3]) 如果 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 满足条件

$$x*(x*y)=y*(y*x),\quad \forall\, x,y\in X,$$

则它是一个 BCK- 代数.

证明 对任意的 $a\in X-B(X)$,我们有

$$0*(0*a)=a*(a*0)=a*a=0.$$

于是 $0\leqslant a$. 这表明 $a\in B(X)$,矛盾. □

定理 1.2.2(K. Iséki[3]) 如果 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 满足

$$(x*y)*y=x*y,\quad \forall\, x,y\in X,$$

则它是一个 BCK- 代数.

证明 令 $x=y$,由定理中条件得:

$$0*x=(x*x)*x=x*x=0,$$

即 $\forall\, x\in X$, $0\leqslant x$. 所以 X 是一个 BCK- 代数. □

定理 1.2.3(K. Iséki[3])　如果 BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$满足条件

$$x*(y*x)=x,\quad \forall\, x,y\in X,$$

则它是一个 BCK- 代数.

证明　令 $x=0$,由定理中条件得:

$$0*(y*0)=0,$$
$$0*y=0.$$

所以 $0\leqslant y$. 这说明 X 是一个 BCK- 代数. □

定理 1.2.4(K. Iséki and A. B. Thaheem[1])　假设 BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$满足条件

$$(x*y)*y=(x*z)*(y*z),\quad \forall\, x,y,z\in X,$$

则 X 是一个 BCK- 代数.

证明　由定理条件得:

$$0*x=(x*x)*x=(x*x)*(x*x)=0*0=0,$$

于是 $0\leqslant x$. 所以 X 是一个 BCK- 代数. □

定理 1.2.5(K. Iséki and A. B. Thaheem[1])　假设 BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$满足条件

$$(x*y)*(y*x)=x*y,\quad \forall\, x,y\in X,$$

则 X 是 BCK- 代数.

证明　由定理条件得:

$$0=(x*y)*(x*y)\leqslant y*x.$$

在此式中令 $x=0$ 得 $0\leqslant y$. 所以 X 是一个 BCK- 代数. □

定理 1.2.6(K. Iséki and A. B. Thaheem[1]) 如果 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 满足条件

$$(x * y) * ((x * y) * (y * x)) = 0, \quad \forall\, x, y \in X,$$

则它是一个 BCK- 代数.

证明 首先证 $\forall\, a \in X - B(X)$,有 $0 * a \in X - B(X)$. 因为如果 $0 * a \in B(X)$,则

$$0 * (0 * a) = 0.$$

因此

$$0 * a = (0 * (0 * a)) * a = (0 * a) * (0 * a = 0,$$

即 $0 \leqslant a$. 这是不可能的.

现在对任一个 $a \in X - B(X)$. 由定理中条件得

$$(a * 0) * ((a * 0) * (0 * a)) = 0,$$

$$a * (a * (0 * a)) = 0.$$

利用BCI-2,我们有 $0 \leqslant 0 * a$,即 $0 * a \in B(X)$. 这与 $0 * a \notin B(X)$ 矛盾. 所以 X 是一个 BCK- 代数. □

1.3 原子和分支

为了研究 BCI- 代数的结构,从序的研究着手是一个重要方法,而原子和分支是 BCI- 序中的重要概念. 本节将致力于原子和分支的研究.

定义 1.3.1 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,元素 $a \in X$ 叫做 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个原子,如果

(i) $\forall\, z \in X, z * a = 0$ 蕴涵 $z = a$.

以 $L(X)$ 记 X 中全体原子的集，即

$$L(X) = \{x \in X: \forall z \in X, z * x = 0 \text{ 蕴涵 } z = x\}.$$

显然，BCI-代数的原子就是关于 BCI-序 $\leqslant$ 的极小元. 由定理 1.1.1 知，$0 \in L(X)$. 所以 $L(X) \neq \varnothing$.

定理 1.3.1 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI-代数，则对任意 $y, z, u \in X$，下列条件等价：

(i) $x \in L(X)$;

(ii) $z * (z * x) = x$;

(iii) $(z * u) * (z * x) = x * u$;

(iv) $x * (z * y) \leqslant y * (z * x)$;

(v) $(x * u) * (z * y) \leqslant (y * u) * (z * x)$;

(vi) $(0 * z) * (0 * x) = x * z$;

(vii) $0 * (0 * x) = x$;

(vii) $0 * (z * x) = x * z$;

(ix) $0 * (0 * (x * z)) = x * z$;

(x) $z * (z * (x * u)) = x * u$.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 由 BCI-2 得

$$(z * (z * x)) * x = 0.$$

因为 $x \in L(X)$，由定义得 $x = z * (z * x)$. (ii) 成立.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 由定理 1.1.2(iii) 和式(ii) 得

$$(z * u) * (z * x) = (z * (z * x)) * u = x * u,$$

(iii) 成立.

(iii)$\Rightarrow$(iv). 由(iii)

$$x * (z * y) = (z * (z * y)) * (z * x) \leqslant y * (z * x).$$

(iv) 成立.

(iv)$\Rightarrow$(v). 由(iv)

$$(x*u)*(z*y)=(x*(z*y))*u$$
$$\leqslant (y*(z*x))*u$$
$$=(y*u)*(z*x).$$

(v) 成立.

(v)⇒(vi). 由(v) 得

$$x*z=(x*z)*(0*0)$$
$$\leqslant (0*z)*(0*x).$$

相反的不等式由 BCI-1 即得,所以(vi) 成立.

(vi)⇒(vii). 由(vi)

$$0*(0*x)=(0*0)*(0*x)=x*0=x,$$

(vii) 成立.

(vii)⇒(viii). 由(vii)

$$0*(z*x)=(0*z)*(0*x)$$
$$=(0*(0*x))*z$$
$$=x*z.$$

(viii) 成立.

(viii)⇒(ix)

$$0*(0*(x*z))=0*((0*x)*(0*z))$$
$$=(0*(0*x))*(0*(0*z))$$
$$=(x*0)*(0*(0*z))$$
$$=x*(0*(0*z))$$
$$\geqslant x*z.$$

相反的不等式显然成立. 所以(ix) 成立.

(ix)⇒(x). 由(x) 得

$$x*u=0*(0*(x*u))$$
$$=0*((z*z)*(x*u))$$
$$=0*\{[z*(x*u)]*z\}$$
$$=\{0*[z*(x*u)]\}*(0*z)$$

$$\leqslant z*(z*(x*u)),$$

相反的不等式自然成立.(x) 成立.

(x)⇒(i). 若 $z*x=0$,由(x) 得

$$x=x*0=z*(z*(x*0))$$
$$=z*(z*x)=z*0=z.$$

于是 $x\in L(X)$. (i) 成立. □

注 1　在定理 1.3.1(iv) 和(v) 中,如果 $y\in L(X)$,则不等式变为等式,即(iv) 和(v) 分别为:$\forall\ x,y\in L(X)$ 和 $\forall\ u,z\in X$,

(iv′)　$x*(z*y)=y*(z*x)$;

(v′)　$(x*u)*(z*y)=(y*u)*(z*x)$.

由定理 1.3.1 可以得到一系列有趣的结果.

推论 1.3.2　$L(X)$ 是 X 的一个子代数.

证明　设 $x,u\in L(X)$. 由定理 1.3.1(x) 得,$\forall\ z\in X$

$$z*(z*(x*u))=x*u.$$

由定理 1.3.1(i),$x*u\in L(X)$. 这表明 $L(X)$ 是一个子代数. □

我们称 $L(X)$ 为 X 的 p- 半单部分.

推论 1.3.3　设$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI- 代数,$\forall\ a\in L(X)$ 和 $\forall\ x\in X$,则 $a*x\in L(X)$. 特别地,$0*x\in L(X)$.

证明　由定理 1.3.1(ix) 得

$$0*(0*(a*x))=a*x.$$

利用定理 1.3.1(vii),我们有 $a*x\in L(X)$. □

记 $a_x = 0*(0*x)$. 因为 $a_x \leqslant x$ 且 $a_x \in L(X)$,所以有

推论 1.3.4 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数,$\forall x \in X$,则存在 $a \in L(X)$ 使得 $a \leqslant x$. □

我们称BCI-代数 $\langle X;*,0\rangle$ 是原子生成的,如果 $\forall x \in X$,$\exists a \in L(X)$ 使得 $a \leqslant x$. 由此推论 1.3.4 可表述为:每个 BCI-代数均是原子生成的.

对于任意 $a \in L(X)$,记 $V(a) = \{x \in X : a \leqslant x\}$. 我们称 $V(a)$ 为 X 的一个分支. 推论 1.3.4 即为

$$X = \bigcup \{V(a) : a \in L(X)\}.$$

显然 $B(X) = V(0)$.

下面讨论分支的一些性质. 利用分支研究 BCI-代数是一个重要方法.

推论 1.3.5 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数,$a \in L(X)$,$b \in L(X)$. 则 $\forall x \in V(b)$ 恒有 $a*x = a*b$.

证明 由推论 1.3.2 知 $a*b \in L(X)$. 另一方面

$$(a*x)*(a*b) = (a*(a*b))*x = b*x = 0.$$

所以 $a*x = a*b$. □

如果 $x \in B(X)$,由上述推论得 $a*x = a$.

定理 1.3.6 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI-代数,且 $a,b \in L(X)$. 则 $\forall x \in V(a)$,$y \in V(b)$ 恒有 $x*y \in V(a*b)$.

证明　因为

$$
\begin{aligned}
&(a*b)*(x*y)\\
&=\{0*[0*(a*b)]\}*(x*y)\\
&=(0*(x*y))*(0*(a*b))\\
&=[(0*x)*(0*y)]*[a*(a*b)]\\
&=\{[0*(0*(a*b))]*x\}*(0*y)\\
&=((a*b)*x)*(0*y)\\
&=((a*x)*b)*(0*y)\\
&=(0*b)*(0*y)\\
&=0*(b*y)\\
&=0*0\\
&=0,
\end{aligned}
$$

所以 $x*y\in V(a*b)$. □

作为该定理的特殊情形有:

若 $a\in L(X)$,则 $\forall\ x,y\in L(a)$, $x*y\in B(X)$;

若 $a,b\in L(X)$ 且 $a\neq b$,则 $\forall\ x\in V(a)$,$\forall\ y\in V(b)$,恒有 $x*y\notin B(X)$.

推论 1.3.7　设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,$a,b\in L(X)$ 且 $a\neq b$,则 $V(a)\cap V(b)=\varnothing$.

证明　如果 $V(a)\cap V(b)\neq\varnothing$,存在 $c\in V(a)\cap V(b)$. 由定理 1.3.6 得 $0=c*c=V(a*b)$,即 $a*b=0$,矛盾. □

作为这个结论的一个直接结果,有

推论 1.3.8　设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数,则它是无界

的.等价地说,有界 BCI-代数是一个 BCK-代数.

BCI-代数的原子和分支是由刘大宏[1],S. A. Bhatti,M. A. Chaudhry 和 B. Ahmad[1],Q. Zhang[4],J. Meng and X. L. Xin[1]研究的.推论 1.3.8 属于李丹[1].本节主要结果引自 J. Meng and X. L. Xin[1].

1.4 元素的幂

遵照群论的思想,J. Meng 和 S. M. Wei[1],[2]和 J. Meng[7]引入并讨论了元素的幂.我们采用下述记号:$\boldsymbol{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,$\boldsymbol{N}^{+}=\{1,2,\cdots\}$.全体整数记为 $\boldsymbol{Z}$.

定义 1.4.1 假设$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI-代数,$x\in X$ 且 $n\in\boldsymbol{Z}$,则 x^n(称为 x 的 n 次幂)递归地定义为:

(i) $x^0=0, x^1=x, x^{-1}=0*x$

(ii) 当 $n>0$ 时,$x^{n+1}=x*(0*x^n)$

(iii) 当 $n<0$ 时,$x^n=(x^{-1})^{-n}$

定理 1.4.1 对任意 $n\in\boldsymbol{Z}$,$0^n=0$.

证明 平凡的. □

定理 1.4.2 设 $a\in L(X)$ 且 $x\in X$,则

(i) $(a^{-1})^{-1}=a$;

(ii) $x^{-n}=a_x^{-n}\ \forall\, n\in\boldsymbol{N}$;

(iii) 若 $x\in B(X)$,则 $x^n=x\ \forall\, n>0$;

(iv)　若 $x \in B(X)$,则 $x^{-n} = 0\ \forall\ n \geqslant 0$.

证明　若 $a \in L(X)$,则

$$(a^{-1})^{-1} = 0 * a^{-1} = 0 * (0 * a) = a,$$

(i) 成立.

因为

$$x^{-0} = (x^{-1})^0 = 0 = (a_x^{-1})^0 = a_x^{-0},$$

$$x^{-1} = 0 * x = 0 * a_x = a_x^{-1},$$

所以当 $n = 0,1$ 时,(ii) 成立. 如果 $n > 0$,则

$$x^{-n} = (x^{-1})^n = (a_x^{-1})^n = a_x^{-n},$$

所以(ii) 成立.

用归纳法容易证明(iii) 和(iv). □

定理 1.4.3　若 $a \in L(X)$,则对任意 $n \in \mathbf{Z}$, $a^n \in L(X)$.

证明　因为 $L(X)$ 是 X 的一个子代数,所以

$a^0 = 0 \in L(X)$,

$a^1 = a \in L(X)$,

$a^{-1} = 0 * a \in L(X)$,

$a^2 = a * (0 * a) \in L(X)$,

$a^{-2} = 0 * a^2 \in L(X)$,

……………,

$a^n \in L(X)$. □

定理 1.4.4　设 $a \in L(X)$,则对 $n \in \boldsymbol{N}$ 有

$$0 * a^{n+1} = (0 * a^n) * a.$$

证明　由定理 1.4.3,定理 1.1.4 和定理 1.3.1(vii) 有

$$
\begin{aligned}
0 * a^{n+1} &= 0 * (a * (0 * a^n)) \\
&= (0 * a) * (0 * (0 * a^n)) \\
&= (0 * a) * a^n \\
&= (0 * a^n) * a,
\end{aligned}
$$

定理得证. □

定理 1.4.5 若 $a,b \in L(X)$ 且 $n,m \in N$,则

(i) $a^{n+m} = a^m * (0 * a^n)$

(ii) $(a^m)^n = a^{nm}$

(iii) $(a * b)^n = a^n * b^n$

(iv) $(0 * a)^n = 0 * a^n$.

证明 为了证明(i),关于 m 运用归纳法. 当 $m = 1$ 时,(i) 显然成立. 设 $m = k$ 时(i) 成立,即 $a^{n+k} = a^k * (0 * a^n)$,则当 $m = k + 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
a^{k+1} * (0 * a^n) &= (a * (0 * a^k)) * (0 * a^n) \\
&= (a^k * (0 * a)) * (0 * a^n) \\
&= (a^k * 0) * ((0 * a) * a^n) \\
&= a^k * ((0 * a^n) * a) \\
&= a^{k+1+n} \\
&= a^{n+k+1}.
\end{aligned}
$$

(i) 成立.

对 $n = 1$,(ii) 显然成立. 设(ii) 对 $n = k$ 成立. 则

$$
\begin{aligned}
(a^m)^{k+1} &= a^m * (0 * (a^m)^k) \\
&= a^m * (0 * a^{mk}) \\
&= a^{m+mk} \\
&= a^{(k+1)m}.
\end{aligned}
$$

所以(ii) 成立.

$n=1$ 时(iii) 显然成立. 设 $n=k$ 时(iii) 成立,则

$$\begin{aligned}(a*b)^{k+1} &= (a*b)*(0*(a*b)^k)\\ &= (a*b)*(0*(a^k*b^k))\\ &= \{a*[(0*a^k)*(0*b^k]\}*b\\ &= \{(0*b^k)*[(0*a^k)*a]\}*b\\ &= [(0*b^k)*b]*[(0*a^k)*a]\\ &= (0*b^{k+1})*(0*a^{k+1})\\ &= a^{k+1}*b^{k+1}.\end{aligned}$$

所以对所有自然数,(iii) 成立.

(iv) 是(iii) 的特殊情形. □

定理 1.4.6　设 X 是一个 BCI- 代数,$x\in X$ 且 $n\in \boldsymbol{N}$,则

(i)　$x^n\in V(a_x^n)$;

(ii)　$0*x^n=0*a_x^n$.

证明　显然 $x^1=x\in V(a_x)$. 假设对 $k\in \boldsymbol{N}$,$x^k\in V(a_x^k)$. 则由推论 1.3.5,$0*x^k=0*a_x^k$. 因此

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x*(0*x^k)=x*(0*a_x^k),\\ a_x^{k+1}*x^{k+1} &= (a_x*(0*a_x^k))*(x*(0*a_x^k))\\ &\leqslant a_x*x=0.\end{aligned}$$

于是 $a_x^{k+1}*x^{k+1}=0$,即 $a_x^{k+1}\leqslant x^{k+1}$. 所以 $x^{k+1}\in V(a_x^{k+1})$. 由归纳法,(i) 成立.

(ii) 是(i) 的直接结果. □

下面推广定理 1.4.4 到整数情形.

定理 1.4.7　设 $a,b\in L(X)$ 且 $n\in \boldsymbol{Z}$,则

$$(a*b)^n=a^n*b^n.$$

证明 仅需对 $n<0$ 证明,此时 $-n>0$,因此

$$\begin{aligned}(a*b)^n &= ((a*b)^{-1})^{-n}\\ &= (0*(a*b))^{-n}\\ &= ((0*a)*(0*b))^{-n}\\ &= (0*a)^{-n}*(0*b)^{-n}\\ &= (a^{-1})^{-n}*(b^{-1})^{-n}\\ &= a^n*b^n.\end{aligned}$$ □

作为定理 1.4.1 和 1.4.7 的推论,我们有

定理 1.4.8 对任意 $a\in L(X)$ 和任意 $n\in \boldsymbol{N}$,我们有

$$(0*a)^n = 0*a^n.$$ □

定理 1.4.9 对 $a\in L(X)$ 和 $n,m\in \boldsymbol{N}$,有

$$a^n*a^m = a^{n-m}.$$ □

证明 分下述情形进行.

当 $n=m$,由定义知结论成立.

当 $m=0$,则 $a^n*a^m=a^n*a^0=a^n*0=a^{n-m}$.

当 $n=0$,由定理 1.4.8,

$$a^n*a^m = a^0*a^m = 0*a^m = a^{-m} = a^{n-m}.$$

当 $n>m>0$,

$$\begin{aligned}a^n*a^m &= a^{m(n-m)}*a^m\\ &= (a^m*(0*a^{n-m}))*a^m\\ &= (a^m*a^m)*(0*a^{n-m})\\ &= 0*(0*a^{n-m})\\ &= a^{n-m}.\end{aligned}$$

当 $m > n > 0$,则

$$\begin{aligned} a^n * a^m &= a^n * a^{n+(m-n)} \\ &= a^n * (a^n * (0 * a^{n-m})) \\ &= 0 * a^{m-n} \\ &= a^{n-m}. \end{aligned}$$

当 $n > 0 > m$,则 $-m > 0$. 因此

$$a^n * a^m = a^n * (0 * a^{-m}) = a^{n-m}.$$

当 $m > 0 > n$,则

$$\begin{aligned} a^n * a^m &= (a^{-1})^{-n} * a^m \\ &= (a^{-1})^{-n} * (0 * (0 * a))^m \\ &= (a^{-1})^{-n} * (0 * a^{-1})^m \\ &= (a^{-1})^{-n} * (0 * (a^{-1})^m) \\ &= (a^{-1})^{-n+m} = a^{n-m}. \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 和 $m < 0$,则

$$\begin{aligned} a^n * a^m &= (a^{-1})^{-n} * (a^{-1})^{-m} \\ &= (a^{-1})^{-n+m} \\ &= a^{n-m}. \end{aligned}$$

这就证明了定理. □

推论 1.4.10　对 $a \in L(X)$ 和 $n,m \in \mathbf{Z}$,我们有

$$a^{n+m} = a^n * (0 * a^m).$$

证明　由定理 1.4.8 和 1.4.9 我们有

$$a^n * (0 * a^m) = a^n * a^{-m} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}.$$ □

定理 1.4.11　对 $a \in L(X)$ 和 $n,m \in \mathbf{Z}$, $(a^n)^m = a^{nm}$.

证明　当 $n,m \geqslant 0$ 时,由定理 1.4.5(ii) 知结论成立.

当 $n > 0 > m$ 时，

$$(a^n)^m = ((a^n)^{-1})^{-m} = ((a^{-1})^n)^{-m}$$
$$= (a^{-1})^{-nm} = a^{-nm}.$$

当 $m > 0 > n$ 时，可类似地证明.

当 $n, m < 0$ 时，则 $-n > 0 > m$. 于是

$$(a^n)^m = ((a^{-1})^{-n})^m = (a^{-1})^{-nm}$$
$$= ((a^{-1})^{-1})^{nm} = a^{nm}.$$

□

1.5 元素的周期

建立在元素幂的基础上，J. Meng 和 S. M. Wei[1] 讨论了元素的周期.

定义 1.5.1 设 X 是一个 BCI-代数，$x \in X$. 如果存在 $k \in N^+$ 使得 $x^k \in B(X)$，则称 x 是有限周期的，

$$|x| = \min\{k \in N^+ : x^k \in B(X)\}$$

叫做 x 的周期. 如果对任意 $k \in N^+$，$x^k \notin B(X)$，则称 x 是无限周期的，记 $|x| = \infty$.

容易看出，当 $a \in L(X)$ 且 $|a| = n$ 时，有 $a^n = 0$.

定理 1.5.1 BCI-代数 X 是一个 BCK-代数当且仅当对任意 $x \in X$，$|x| = 1$.

证明是平凡的. □

定理 1.5.2 设 $a \in L(X)$，则对任意 $x \in V(a)$，$|x| = |a|$，

即同一分支的元素有相同周期.

证明　设 $x \in V(a)$.

如果 $|a| = 1$,则 $a = 0$. 由定理 1.4.6(ii),$0 * x = 0 * a = 0$,即 $0 \leqslant x$. 因此 $|x| = 1$.

如果 $|a| = n > 1$ 则 $a^n = 0$ 且当 $1 \leqslant m < n$ 时 $a^m \neq 0$. 由定理 1.4.6(ii),$0 * x^n = 0 * a^n = 0$ 且 $0 * x^m = 0 * a^m \neq 0$,因此 $|x| = n$.

如果 $|a| = \infty$,则对任意 $n \in N^+$ 有 $a^n \neq 0$. 因此 $0 * x^n = 0 * a^n \neq 0$. 这表明 $|x| = \infty$. □

这个定理告诉我们,元素周期的研究可转化为原子周期的研究.

定理 1.5.3　设 $|x| = n < \infty$,则 $x^m \in B(X)$ 当且仅当 $n | m$.

证明　设 $x \in V(a)$ 且 $|x| = n < \infty$,则 $a^n = 0$.

如果 $m = np$,则由定理 1.4.5(ii),

$$a^m = a^{np} = (a^n)^p = 0^p = 0.$$

另一方面 $a^m = x^m$,所以 $x^m \in B(X)$.

相反地,如果 $x^m \in B(X)$ 则 $a^m \in B(X)$,即 $a^m = 0$. 假设 $m = np + r$,这儿 $p, r \in N^+$ 且 $0 < r < n$,则

$$\begin{aligned} 0 = a^m &= a^{np+r} \\ &= a^{np} * (0 * a^r) \\ &= (a^n)^p * (0 * a^r) \\ &= 0 * (0 * a^r) \\ &= a^r. \end{aligned}$$

因此 $a^r \in B(X)$. 这表明 $|a| \leqslant r < n$,矛盾. 所以 $n | m$. □

定理 1.5.4 如果 $|x| = n$ 且 $m \in N^{+}$，则 $|x^{m}| = n/d$ 这儿 $d = GCD(n, m)$.

证明 由定理 1.5.2，我们仅需对原子 x 进行讨论. 设 $n = dn'$，$m = dm'$ 则 $GCD(n', m') = 1$.

因为

$$(x^{m})^{n'} = x^{mn'} = x^{m'dn'} = x^{m'n} = (x^{n})^{m'} = 0^{m'} = 0,$$

因此 $(x^{m})^{n'} \in B(X)$，即 $(x^{m})^{n/d} \in B(X)$.

设 $l \in N^{+}$ 使得 $(x^{m})^{l} \in B(X)$. 由定理 1.5.3，n 整除 ml，因此 n' 整除 $m'l$. 由于 $GCD(n', m') = 1$，则 $n' \mid l$. 于是 $l \geqslant n' = n/d$. 这就证明了 $|x^{m}| = n/d$. □

定理 1.5.5 $|x| = |x^{-1}|$.

证明 仅需对原子 a 证明：

如果 $|a| = n$，则 $a^{n} = 0$. 由定理 1.4.11，

$$(a^{-1})^{n} = a^{-n} = (a^{n})^{-1} = 0^{-1} = 0,$$

因此 $|a^{-1}| \leqslant |a|$. 相反地，如果 $|a^{-1}| = m$，则 $(a^{-1})^{m} = 0$. 由定理 1.4.11，

$$a^{m} = (a^{-m})^{-1} = 0^{-1} = 0,$$

所以 $|a| \leqslant |a^{-1}|$. 这就证明了当 $|a| < \infty$ 时 $|a| = |a^{-1}|$.

如果 $|a| = \infty$，则对任意 $n \in N^{+}$，

$$(a^{-1})^{m} = (a^{m})^{-1} = 0 * a^{m} \neq 0.$$

因此 $|a^{-1}| = \infty$. 于是 $|a| = |a^{-1}| = \infty$. □

定理 1.5.6 设 X 是一个 BCI- 代数.

如果 x 和 y 属于 X 的同一个分支，则 $|x * y| = 1$；

如果 x 和 y 不属于同一个分支,则 $|a*b|$ 是 LCM$(|x|,|y|)$ 的一个因数.

证明　如果 x 和 y 属于同一个分支,则 $x*y\in B(X)$,因此 $|x*y|=1$.

如果 x 和 y 不属于同一分支,则存在 $a,b\in L(X),a\neq b$ 使得 $x\in V(a)$ 和 $y\in V(b)$. 因此 $|x|=|a|,|y|=|b|$ 和 $|x*y|=|a*b|$. 仅需证明 $|a*b|$ 是 LCM$(|a|,|b|)$ 的一个因数. 令 $|a|=n=n'd$, $|b|=m=m'd$ 且 $d=\text{GCD}(n,m)$. 于是

$$
\begin{aligned}
(a*b)^{n'm'd} &= a^{n'm'd}*b^{n'm'd}\\
&=(a^n)^{m'}*(b^m)^{n'}\\
&=0*0=0\in B(X).
\end{aligned}
$$

由定理 1.5.3,$|a*b|$ 是 LCM$(|a|,|b|)$ 的一个因数. □

在这个定理中,$|x*y|=\text{LCM}(|x|,|y|)$ 是可能的. 例如,$X=\{e^{k\pi i/3}:k\in \mathbf{Z}\}$,定义 $e^{k\pi i/3}*e^{m\pi i/3}=e^{(k-m)\pi i/3}$,则 $\langle X;*,1\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 容易验证

$$|e^{\pi i}|=2,\ |e^{-2\pi i/3}|=3,\ |e^{\pi i}*e^{-2\pi i/3}|=|e^{5\pi i/3}|=6.$$

定理 1.5.7　设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个有限 BCI- 代数,则 X 的每个元素是有限周期的.

证明　对任意 $x\in L(X)$,考察序列

$$x^1,x^2,\cdots,x^n,\cdots.$$

因为 X 是有限的,故存在 $n,m\in N^+$ 使得 $x^n=x^m$,这儿无妨设 $n>m$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 &= x^n*x^m\\
&= x^{m+(n-m)}*x^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x^m * (0 * x^{n-m})) * x^m \\
&= (x^m * x^m) * (0 * x^{n-m}) \\
&= 0 * (0 * x^{n-m}) \\
&= x^{n-m}.
\end{aligned}
$$

这表明每个原子的周期是有限的. 由定理 1.5.2,每个元素的周期是有限的. □

值得注意的是,存在无限 BCI- 代数,它的每个元素的周期是有限的. 例 1.1.3 就是这样一个代数.

一个 BCI- 代数叫做周期的,如果它的每个元素是有限周期的. 因此定理 1.5.7 是说,每个有限 BCI- 代数是周期的.

1.6 理 想

定义 1.6.1 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的子集 I 叫做它的一个理想,如果

(i) $0 \in I$;

(ii) $x * y \in I$ 和 $y \in I$ 蕴涵 $x \in I$.

一个理想 I 叫做闭的,如果 $x \in I$ 蕴涵 $0 * x \in I$.

显然 $\{0\}$ 和 X 是 X 的两个理想.

定理 1.6.1 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的非空子集 I 是一个理想当且仅当 $\forall x, y \in I$,

$$A(x, y) = \{z \in X : z * x \leqslant y\} \subseteq I.$$

由此得,若 I 是一个理想,$x \in I$ 和 $y \leqslant x$,则 $y \in I$.

定理1.6.2 设I是BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$的一个理想.对于任意$x,y\in X$,定义$x\sim y(\mathrm{mod}I)$,(或简单地,$x\sim y$)当且仅当$x*y\in I$和$y*x\in I$,则$\sim$是X上的一个同余关系.记$C_x^I=\{y\in X:x\sim y\}$,如果不会混淆,也简记C_x^I为C_x.定义$C_x*C_y=C_{x*y}$.记$X/I=\{C_x:x\in X\}$.则$\langle X/I;*,C_0\rangle$是一个BCI-代数.如果I是一个闭理想,则$C_0=I$.

证明 显然$\sim$是反身的和对称的.现仅证传递性.设$x\sim y$和$y\sim z$,则$x*y,y*z\in I$.由BCI-1

$$(x*z)*(x*y)\leqslant y*z,$$

所以$x*z\in I$.同理知$z*x\in I$.这就证明了$x\sim z$.因此$\sim$是X上的一个等价关系.

如果$x\sim y$和$u\sim v$,则

$$(x*u)*(x*v)\leqslant v*u\in I,$$
$$(x*v)*(x*u)\leqslant u*v\in I.$$

所以$(x*u)*(x*v)\in I$和$(x*v)*(x*u)\in I$,即$x*u\sim x*v$.另一方面

$$(x*v)*(y*v)\leqslant x*y\in I,$$
$$(y*v)*(x*v)\leqslant y*x\in I,$$

所以$(x*v)*(y*v)\in I$和$(y*v)*(x*v)\in I$,即$x*v\sim y*v$.由传递性得$x*u\sim y*v$.这表明$\sim$是X上的一个同余关系.

显然我们有

$$((C_x*C_y)*(C_x*C_z))*(C_z*C_y)$$
$$=C_{((x*y)*(x*z))*(z*y)}=C_0,$$
$$(C_x*(C_x*C_y))*C_y=C_{(x*(x*y))*y}=C_0,$$
$$C_x*C_x=C_{x*x}=C_0.$$

如果$C_x*C_y=C_y*C_x=C_0$,则$C_{x*y}=C_{y*x}=C_0\subseteq I$,于是$x*y$,

$y * x \in I$,即 $x \sim y$, $C_x = C_y$. 这就证明了 $\langle X/I; *, C_0\rangle$ 是一个 BCI- 代数.

最后,假设 I 是闭理想. 为了证明 $C_0 = I$,仅需证 $I \subseteq C_0$. 设 $x \in I$,由 I 的闭性,$0 * x \in I$,所以 $x \sim 0$,即 $x \in C_0$. □

在定理 1.6.2 中,C_x 叫做包含 x 的等价类,$\langle X/I; *, C_0\rangle$ 叫做 X 关于 I 的商代数.

定理 1.6.3(K. Iséki[3]) BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的 BCK- 部分 $B(X)$ 是它的一个理想.

证明 设 $x * y \in B(X)$ 和 $y \in B(X)$,来证 $x \in I$. 如果 $x \notin B(X)$,则 $\exists\, a \in L(X)$ 使 $x \in V(a)$,注意到 $a \neq 0$ 且 $y \in B(X) = V(0)$,由推论 1.3.9 知 $x * y \notin B(X)$,矛盾. □

对于 BCK- 代数,每个理想是子代数. 但是对于 BCI- 代数,理想不必是子代数.

例 1.6.1(陈昭木[2]) BCI- 代数 $\langle Q^*; \div, 1\rangle$ 中,令 $\mathbf{Z}^*$ 是所有非零整数作成的集合. 因为

(i) $1 \in \mathbf{Z}^*$;

(ii) $x \div y \in \mathbf{Z}^*$ 和 $y \in \mathbf{Z}^*$ 蕴涵 $x \in \mathbf{Z}^*$,

所以 $\mathbf{Z}^*$ 是它的一个理想,但是 $\mathbf{Z}^*$ 关于 $\div$ 不封闭,因而 $\mathbf{Z}^*$ 不是子代数.

这就给 BCI- 代数理想的研究带来了不便. 为了克服这一困难,陈昭木于 1987 年提出了优 BCI- 代数的概念.

定理 1.6.4(陈昭木[2]) BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的理想 I 是它

的子代数当且仅当 $\forall x \in I$ 恒有 $0 * x \in I$.

证明　必要性显然,仅证充分性.设 $x, y \in I$,则

$$(x * y) * x = (x * x) * y = 0 * y \in I.$$

由于 I 是理想,所以 $x * y \in I$,即 I 是 X 的一个子代数. □

定义 1.6.2　若 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的每个理想是它的子代数,则称 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个优 BCI- 代数.

显然 BCK- 代数是优 BCI- 代数;$\langle Q^*; \div, 1\rangle$ 不是优 BCI- 代数.

定理 1.6.5(陈昭木[2])　有限 BCI- 代数是优 BCI- 代数.

证明　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有限 BCI- 代数,X 包含 n 个元素.如果 I 是 X 的一个理想,$\forall a \in I$,考虑如下 $n+1$ 个元素

$$0,\ 0 * a,\ 0 *^2 a,\ \cdots\cdots,\ 0 *^n a.$$

其中必有两个相等.无妨设

$$0 *^r a = 0 *^s a,\ s < r \leqslant n.$$

则

$$\begin{aligned} 0 &= (0 *^r a) * (0 *^s a) \\ &= \{[\cdots((0 *^s a) \overbrace{* a) * \cdots] * a}^{r-s\text{次}}\} * (0 *^s a) \\ &= 0 *^{r-s} a \in I. \end{aligned}$$

由于 I 是理想,结合 $a \in I$,得 $0 * a \in I$.由定理 1.6.4,I 是 X 的一个子代数.这表明 $\langle X; *, 0\rangle$ 是优 BCI- 代数. □

前一节,证明了 $L(X)$ 是 X 的子代数,自然我们要问 $L(X)$ 是

不是一个理想?回答是否定的.

例 1.6.2 设 $X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 乘由下表给出

$*$	0	1	2	3
0	0	3	0	1
1	1	0	1	3
2	2	3	0	1
3	3	1	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数. $L(X) = \{0,1,3\}$,因为 $2 * 3 = 1 \in L(X)$,但 $2 \notin L(X)$,所以 $L(X)$ 不是理想.

定理 1.6.6 设 I 是BCI-代数 X 的一个理想,则 I 是闭的当且仅当 I 是 X 的一个子代数.因此 X 是优的当且仅当 X 的每个理想是闭的.

证明 设 I 是闭的,且 $x,y \in I$.因为

$$(x * y) * x = 0 * y \in I,$$

所以 $x * y \in I$.这表明 I 是 X 的一个子代数.相反的蕴涵是明显的. □

现在我们先证明BCI-代数的一条基本性质.

定理 1.6.7 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数, $n \in N$,则 $\forall x, y \in X$

(i) $(0 *^n x) * (0 *^n y) = 0 *^n (x * y)$.

证明 $n = 1$ 时,由定理 1.1.4 得(i).假设 $n = k$ 时(i)成立.

注意到 $0*^k x$ 和 $0*^k y$ 是原子，无妨设 $x \in V(a)$ 和 $y \in V(b)$，这儿 $a,b \in L(X)$，由推论 1.3.5 知：

$$
\begin{aligned}
&(0*^{k+1}x)*(0*^{k+1}y)\\
=&[(0*^k x)*x]*[(0*^k y)*y]\\
=&[(0*^k x)*a]*[(0*^k y)*b]\\
=&[(0*^k x)*(0*^k y)]*(a*b) \qquad [\text{由节 1.3 式}(v')]\\
=&[0*^k(x*y)]*(x*y)\\
=&0*^{k+1}(x*y).
\end{aligned}
$$

由归纳法知(i) 成立. □

定理 1.6.7 引自张小红[1].

1.7　同态和同构

同态映射和同构映射在代数系统的研究中是非常重要的，BCI- 代数也不例外.

定义 1.7.1　设 $\langle X;*_1,0_1\rangle$ 和 $\langle Y;*_2,0_2\rangle$ 是两个 BCI- 代数. 映射 $f:X\to Y$ 叫做 X 到 Y 的一个同态映射，如果对于任意 $x_1,x_2 \in X$，总有

$$f(x_1 *_1 x_2) = f(x_1) *_2 f(x_2);$$

如果 f 还是 X 到 Y 的满射，则称 f 是 X 到 Y 的满同态，用符号 $X \overset{f}{\sim} Y$ 表示，也可简记为 $X\sim Y$，这时，称 Y 是在 f 下 X 的同态象.

显然，$f(0_1)=0_2$.

如果 X 到 Y 的同态映射 f 是 X 到 Y 的单射，则称 f 是 X 到 Y 的单同态.

如果 X 到 Y 的同态映射 f 既是 X 到 Y 的单射，又是满射，则

称 f 为 X 到 Y 的一个同构映射;此时,我们称 X 与 Y 同构,记为 $X \overset{f}{\cong} Y$,或简记为 $X \cong Y$.

例 1.7.1 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 和 $\langle X'; *', 0'\rangle$ 是两个 BCI- 代数.令 $f: X \to X'$ 为:$\forall x \in X$ 恒有 $f(x) = 0'$.则 f 是 X 到 X' 的一个同态映射.事实上,对任意 $x, y \in X$,

$$f(x * y) = 0' = 0' * 0' = f(x) * f(y).$$

这个同态叫做零同态.

例 1.7.2 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,I 是 X 的一个理想,令 $f: X \to X/I$ 为:对任意 $x \in X$,$f(x) = C_x$,则

$$f(x * y) = C_{x*y} = C_x * C_y = f(x) * f(y).$$

所以 f 是 X 到 X/I 的一个满同态.称这个同态为 X 到 X/I 的自然同态.

例 1.7.3 设 $X = \{0,1,2,3,4,5\}$,$Y = \{0,a,b,c\}$,$*$ 表分别如下:

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	4	3	4
1	1	0	1	4	3	4
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	3	0	4	0
4	4	4	4	3	0	3
5	5	3	5	1	4	0

*	0	a	b	c
0	0	0	c	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	c
c	c	c	b	0

令 $f:X \to Y$ 如下：$f(0)=f(1)=0, f(2)=a, f(3)=f(5)=b$, $f(4)=c$. 则 f 是 X 到 Y 的一个满同态.

设 f 是 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 到 BCI- 代数 $\langle X'; *', 0'\rangle$ 的一个同态映射，而 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq X'$ 是非空集，记

$$\mathrm{Im} f = \{f(x): x \in X\},$$
$$f(A) = \{f(x): x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\},$$
$$\mathrm{Ker} f = \{x \in X: f(x) = 0'\} = f^{-1}(0').$$

称 $\mathrm{Ker} f$ 为同态映射 f 的核.

定理 1.7.1　设 f 是 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 到 $\langle X'; *, 0'\rangle$ 的一个同态映射.

(i)　$\mathrm{Ker} f$ 是 X 的一个闭理想；

(ii)　如果 A 是 X' 的一个闭理想，则 $f^{-1}(A)$ 是 X 的一个闭理想.

证明　因为 $\{0'\}$ 是 X' 的一个闭理想，所以 (i) 是 (ii) 的特例. 现仅给出 (ii) 的证明. 设 $x * y \in f^{-1}(A)$ 和 $y \in f^{-1}(A)$，则 $f(x) * f(y) = f(x * y) \in A$ 和 $f(y) \in A$. 因此 $f(x) \in A$，即 $x \in f^{-1}(A)$. 显然有 $0 \in f^{-1}(A)$. 这就证明了 $f^{-1}(A)$ 是 X 的一个理想. 对任意 $x \in f^{-1}(A)$，因为

$$f(0 * x) = f(0) * f(x) = 0' * f(x) \in A,$$

所以 $0 * x \in f^{-1}(A)$. 这表明 $f^{-1}(A)$ 还是闭的. □

在上述证明中顺便得到了

命题 1.7.2 设 f 是 BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 到 $\langle X'; *, 0'\rangle$ 的一个同态映射, A 是 X' 的一个子代数(或理想), 则 $f^{-1}(A)$ 是 X 的一个子代数(或理想). □

定理 1.7.3 设 f 是 BCI-代数 $\langle X'; *, 0\rangle$ 到 $\langle X'; *, 0'\rangle$ 的一个同态映射, 则 f 是单的当且仅当 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.

证明 设 f 是单的. 对任意 $x \in \mathrm{Ker}f$, 总有 $f(x) = 0' = f(0)$, 所以 $x = 0$. 这表明 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.

相反地, 假设 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$, 任取 $x, y \in X$, 如果 $f(x) = f(y)$, 则

$$f(x * y) = f(x) * f(y) = 0',$$
$$f(y * x) = f(y) * f(x) = 0',$$

即 $x * y \in \mathrm{Ker}f$ 和 $y * x \in \mathrm{Ker}f$. 所以

$$x * y = y * x = 0, \ x = y.$$

这表明 f 是单的. □

下述命题是显然的.

命题 1.7.4 设 f 是 BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 到 $\langle X'; *, 0'\rangle$ 的一个同态映射, 则 f 是满的当且仅当 $\mathrm{Im}f = X'$. □

定义 1.7.2 如果 f 是 BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 到自身的一个同

态映射，则称 f 是 X 的一个自同态.

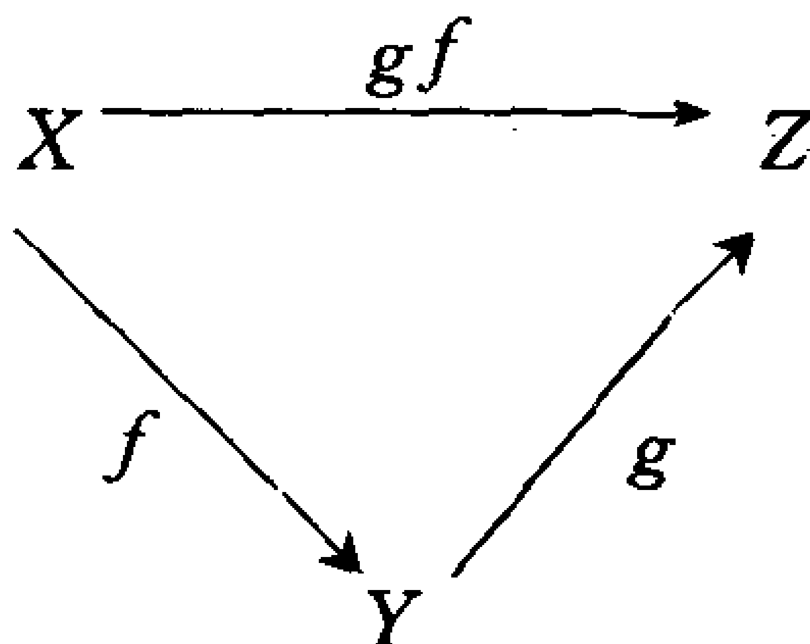
例 1.7.4　设 $\langle X; *, 0' \rangle$ 是一个 BCI-代数，$f: X \to X$ 定义为：对任意 $x \in X$，$f(x) = x$. 显然 f 是 X 的一个自同态，今后这个同态将简记为 1_X，并称为 X 的恒等同态.

例 1.7.5　设 $\langle X; *, 0 \rangle$ 是一个 BCI-代数，X_0 是它的一个子代数. $f: X_0 \to X$ 定义为：对任意 $x \in X_0$，$f(x) = x$. 则 f 是 X_0 到 X 的一个同态. 这个同态称为包含同态.

假设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个映射，那末映射 $gf: X \to Z$ 定义为：

$$(gf)(x) = g(f(x)), \forall\ x \in X.$$

用三角形图可以把这个定义直观地描绘成：



我们说这个图可换指的是，由 X 到 Z 的结果不依赖于我们是直接用 gf 得到的，还是用 f 经过 Y 再用 g 得到的. 我们称 gf 为 f 与 g 的复合，有时也记为 $g \circ f$.

定理 1.7.5　设 f 是 BCI-代数 $\langle X; *, 0_X \rangle$ 到 $\langle Y; *, 0_Y \rangle$ 的一个同态映射，g 是 BCI-代数 $\langle Y; *, 0_Y \rangle$ 到 $\langle Z; *, 0_Z \rangle$ 的一个同态映射，则 gf 是 $\langle X; *, 0_X \rangle$ 到 $\langle Z; *, 0_Z \rangle$ 的一个同态映射.

证明 平凡的. □

定理1.7.6 设X,Y,Z,W是BCI-代数,$f:X\to Y$,$g:Y\to Z$,$h:Z\to W$是同态映射,则$h(gf)=(hg)f$.

证明 平凡的. □

假设$f:X\to Y$和$g:Y\to X$是任意两个同态映射.如果$fg=1_Y$,则称f为g的一个*左逆*,称g为f的一个*右逆*.如果还有$gf=1_X$,则称g是f的*双侧逆*,简称为*逆*(这时f也是g的逆),并用f^{-1}记g.

不难证明,一个同态有逆,则逆是唯一的,并有下述等式

$$(f^{-1})^{-1}=f,\ (gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}.$$

同样容易证明,一个同态映射有逆当且仅当它是一个*双射*(即它既是单的也是满的).

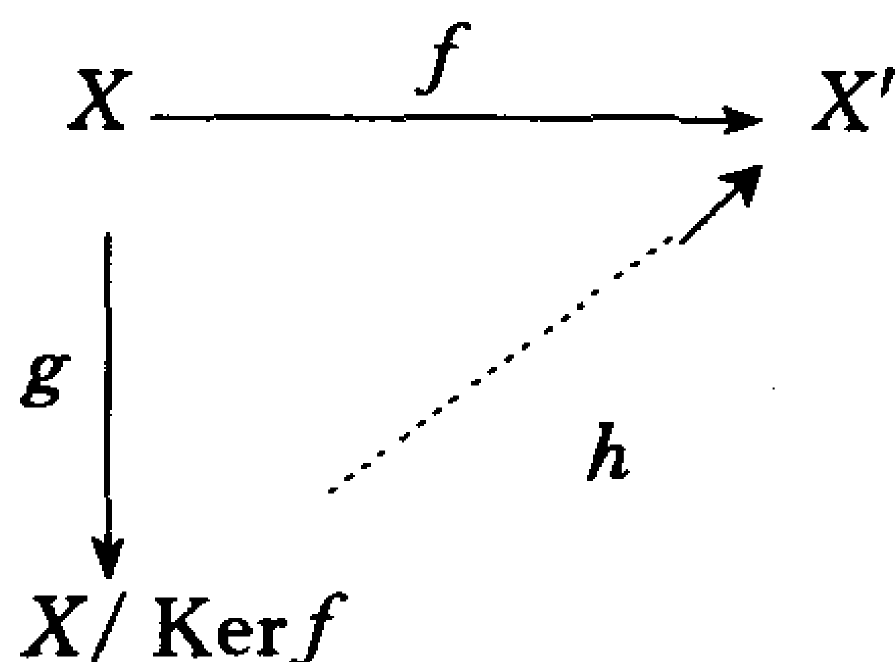
现在,我们给出BCI-代数的同态基本定理:

定理1.7.7(同态基本定理) 设f是BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$到$\langle X';*,0'\rangle$的一个满同态,则$X/\mathrm{Ker}f\cong X'$.

证明 设g是X到$X/\mathrm{Ker}f$的自然同态,如下定义映射h:$X/\mathrm{Ker}f\to X'$,对任意$C_x\in X/\mathrm{Ker}f$, $h(C_x)=f(x)$.如果$C_x=C_y$,则$x*y\in\mathrm{Ker}f$和$y*x\in\mathrm{Ker}f$,即

$$f(x)*f(y)=f(x*y)=0=f(y*x)=f(y)*f(x).$$

所以$f(x)=f(y)$.这表明h是良好定义的.



因为

$$h(C_x * C_y) = h(C_{x*y}) = f(x * y)$$
$$= f(x) * f(y) = h(C_x) * h(C_y),$$

所以 h 是一个同态映射. 显然 h 是满的.

如果对任意 $C_x, C_y \in X/\mathrm{Ker}f$, $h(C_x) = h(C_y)$，则

$$f(x) = f(y),\ f(x * y) = f(y * x) = 0'.$$

于是 $x * y, y * x \in \mathrm{Ker}f$. 所以 $C_x = C_y$. 这就证明了 h 还是单射. 所以 h 是 $X/\mathrm{Ker}f$ 到 X' 的一个同构映射，于是 $X/\mathrm{Ker}f \cong X'$. □

推论 1.7.8 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个闭理想，$h: X \to X/I$ 是自然同态，则 $\mathrm{Ker}h = I$.

证明 对任意 $x \in \mathrm{Ker}h$，我们有 $C_x = h(x) = C_0 = I$，所以 $x \in I$. 反之，设 $x \in I$，则 $x \in C_0$, $C_x = C_0$，因此 $x \in \mathrm{Ker}h$. 这就证明了 $\mathrm{Ker}h = I$. □

例 1.7.6 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，n 是一个自然数，令 $f: X \to X$ 使得对任意 $x \in X$，$f_n(x) = 0 *^n x$. 由定理 1.6.7，f 是 X 上一个自同态. 如果 $n = 2$，则

$$f_2(x) = 0 * (0 * x) = a_x \in L(X).$$

由此看出 $\mathrm{Ker}f_2 = B(X)$. 利用同态基本定理得：$X/B(X) \cong L(X)$.

设 X 是一个 BCI-代数，K 是 X 的一个子集，H 是 X 的一个闭理想. 记

$$KH = \bigcup \{C_a^H : a \in K\}.$$

引理 1.7.9 设 X 是一个 BCI-代数. 如果 K 是 X 的一个子代数，H 是 X 的一个闭理想，则 KH 是 X 的一个子代数.

证明 显然 $0 \in KH$. 设 $x, y \in KH$，则存在 $a, b \in K$ 使得 $x \in C_a^H$，$y \in C_b^H$，因此 $x * y \in C_{a*b}^H$. 由于 K 是 X 的子代数，所以 $a * b \in K$. 这就证明了 $x * y \in KH$，即 KH 是 X 的一个子代数. □

下面我们给出另外两个重要的同构定理.

定理 1.7.10 假设 X 是一个 BCI-代数，K 是 X 的一个子代数，H 是 X 的一个闭理想. 则有下述结论：

(i) $K \cap H$ 是 K 的一个闭理想，

(ii) $KH/H \cong K/(K \cap H)$.

证明 显然 $K \cap H$ 是 K 的一个子代数. 假设对于 $x, y \in K$ 有 $x * y \in K \cap H$ 和 $y \in K \cap H$. 注意到 H 是 X 的一个理想，我们有 $x \in H$. 因此 $x \in K \cap H$. 这表明 $K \cap H$ 是 K 的一个闭理想. (i) 得证.

为了证(ii)，令 $f: K \to KH/H$ 使得对任意 $k \in K$，$f(k) = C_k^H \in KH/H$. 显然 f 是一个满同态. 现在证明 $\mathrm{Ker}f = K \cap H$. 首先注意 KH/H 的零元素就是 H. 所以 $\mathrm{Ker}f \subseteq K \cap H$. 相反地，对任意 $k \in K \cap H$，则 $k \in H$，所以 $f(k) = C_k^H = H$. 这就证明了 $\mathrm{Ker}f = K \cap H$. 最后由同态基本定理得 $K/(K \cap H) \cong KH/H$. □

引理 1.7.11　设 X 是一个 BCI- 代数. 如果 A 是 X 的一个闭理想,K 是 A 的一个闭理想,则下述结论成立:

(i)　K 是 X 的一个闭理想,

(ii)　对任意 $C_x^k \in X/K$, $C_x^K \cap A \neq \varnothing$ 蕴涵 $C_x^K \subseteq A$.

证明　显然 K 是 X 的一个子代数. 任取 $x, y \in X$, 如果 $x * y \in K$ 和 $y \in K$, 则由 $K \subseteq A$ 得 $x * y \in A$ 和 $y \in A$. 由于 A 是 X 的一个闭理想, 则 $x \in A$. 现在利用 K 是 A 的闭理想得 $x \in K$, 这表明 K 是 X 的一个闭理想. (i) 得证.

设 $y \in C_x^K \cap A$, 则 $y \in A$ 和 $x * y \in K \subseteq A$. 所以 $x \in A$. 如果 $C_x^K \cap A \neq \varnothing$, 则对任意 $z \in C_x^K$, 我们有 $z * x \in K \subseteq A$. 结合 $x \in A$ 得 $z \in A$. 这就是说 $C_x^K \subseteq A$. (ii) 得证. □

鉴于这个定理, A/K 既可理解为 BCI- 代数 A 关于理想 K 的商, 也可以理解为 $\{C_x^K \in X/K : C_x^K \subseteq A\}$. 因此符号 A/K 的意义是良好定义的.

定理 1.7.12　设 X 是一个 BCI- 代数, A 是 X 的一个闭理想, K 是 A 的一个闭理想, 则

$$X/A \cong (X/K)/(A/K).$$

证明　令 $f: X/K \to X/A$ 使得对任意 $x \in X$, $f(C_x^K) = C_x^A$. 易知 f 是一个满同态. 我们知道 X/A 的零元素是 $C_0^A = A$. 因此对任意 $C_x^K \in \mathrm{Ker}f$, $f(C_x^K) = A$, 即 $C_x^A = A$, 所以 $x \in A$. 由此得 $C_x^K \in \mathrm{Ker}f$ 蕴涵 $x \in A$, 即 $\mathrm{Ker}A \subseteq A/K$. 相反地, 对任意 $C_x^K \in A/K$, 由引理 1.7.11 知 $x \in A$, 所以 $f(C_x^K) = C_x^A = A$. 这意味着 $A/K \subseteq \mathrm{Ker}f$, 以上证明了 $\mathrm{Ker}f = A/K$. 由同态基本定理有

$$X/A \cong (X/K)/(A/K). \qquad \square$$

在上述证明中,实际上顺便证明了下述

推论 1.7.13 设 X 是一个 BCI-代数,A 是 X 的一个闭理想,K 是 A 的一个闭理想,则 A/K 是 X/K 的一个闭理想. $\square$

本节最后,我们给出 BCI-代数 X 与其商代数中理想之间的对应关系. 设 I 是 X 的一个闭理想,以 $\boldsymbol{CI}(X,I)$ 记 X 中包含 I 的全体闭理想的集,以 $\boldsymbol{CI}(X/I)$ 表示商代数 X/I 中所有闭理想之集.

定理 1.7.14 设 X 是一个 BCI-代数,I 是 X 的一个闭理想,η 是 X 到 X/I 上的自然同态. 令 $f:\boldsymbol{CI}(X,I)\to\boldsymbol{CI}(X/I)$ 使得对任意 $A\in\boldsymbol{CI}(X,I)$,

$$f(A) = A/I.$$

则 f 是到 $\boldsymbol{CI}(X/I)$ 的一一对应.

证明 由推论 1.7.13,f 是良好定义的. 对于 X/I 中任一闭理想 K,则 $f^{-1}(K)=\eta^{-1}(K)\in\boldsymbol{CI}(X,I)$. 所以 f 是一个满射. 由引理 1.7.11 知 f 还是一对一的. 所以 f 是 $\boldsymbol{CI}(X,I)$ 到 $\boldsymbol{CI}(X/I)$ 上的一一对应. $\square$

本节主要结果引自 Z. M. Chen 和 H. X. Wang[2].

第 2 章　几类 BCI- 代数

本章将叙述几类重要的 BCI- 代数，它们是 BCI- 代数理论的重要组成部分.

2.1　结合 BCI- 代数

Q. P. Hu and K. Iséki[1] 给出了结合 BCI- 代数的概念，并与元素皆对合的 Abel 群联系起来.

定义 2.1.1　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 若 $\forall\ x, y, z \in X$ 恒有

(i)　$(x * y) * z = x * (y * z)$,

则称 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个结合 BCI- 代数.

例 2.1.1　设 $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $*$ 表如下

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个结合 BCI- 代数.

例 2.1.1 是一个结合 BCI- 代数.

定理 2.1.1(Q. P. Hu and K. Iséki[1]) 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数,则下列条件等价:

(i) X 是结合的;

(ii) $0 * x = x, \forall\, x \in X$;

(iii) $x * y = y * x, \forall\, x, y \in X$.

证明 (i)⇒(ii). 因为 X 是结合的,由定义

$$0 * x = (x * x) * x = x * (x * x) = x * 0 = x,$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(iii). 若(ii) 成立,则

$$(x * y) * (y * x) = ((0 * x) * (0 * y)) * (y * x) = 0.$$

由对称性得$(y * x) * (x * y) = 0$. 所以 $x * y = y * x$,(iii) 成立.

(iii)⇒(i). 若(iii) 成立,则

$$x * (y * z) = (y * z) * x = (y * x) * z = (x * y) * z,$$

由定义 X 是结合的. □

定理 2.1.2(Q. P. Hu and K. Iséki[1])　一个(2,0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是结合 BCI-代数当且仅当$\langle X;*,0\rangle$是一个元素皆对合的 Abel 群(即对合 Abel 群).

证明　必要性. 设$\langle X;*,0\rangle$是一个结合 BCI-代数,由定义知$*$满足结合律;由定理 2.1.1(ii) 知 0 是左单位元;由 BCI-3 知x是x的左逆元. 故$\langle X;*,0\rangle$是一个元素皆对合的 Abel 群.

充分性显然. □

由定理 2.1.1(ii) 看出,结合 BCK-代数必是平凡的. 下面给出结合 BCI-代数的简化公理系统.

定理 2.1.3　(2,0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是一个结合 BCI-代数当且仅当它满足:$\forall\, x,y,z \in X$

(i)　$(y*x)*(z*x) = z*y$;

(ii)　$x*0 = x$.

证明　必要性. 仅需证(i) 成立. 因为

$$
\begin{aligned}
&((y*x)*(z*x))*(z*y)\\
=\ &((x*y)*(x*z))*(z*y) &&[\text{由定理 } 2.1.1(\text{iii})]\\
=\ &0. &&[\text{由 BCI-1}]
\end{aligned}
$$

由定理 2.1.1(iii) 和上式得

$$
\begin{aligned}
&(z*y)*((y*x)*(z*x))\\
=\ &((y*x)*(y*x))*(z*y)\\
=\ &0.
\end{aligned}
$$

由上述两个等式得(i).

充分性. 在(i) 中令$x=0$,由(ii) 得

$$z * y = (y * 0) * (z * 0) = y * z,$$

定理 2.1.1(iii) 成立.

由(i) 和定理 2.1.1(iii) 得

(1)　$(x * y) * (x * z) = z * y$.

在(1) 中令 $y = 0$,由(ii) 得

$(x * 0) * (x * z) = z * 0$,

(2)　$x * (x * z) = z$.

在(2) 中令 $z = 0$,由(ii) 得 $x * x = 0$. 这表明 BCI-3 成立.

由 BCI-3 和(1) 得

$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = (z * y) * (z * y) = 0$,

所以 BCI-1 成立.

由 BCI-3 和(2) 得

$$(x * (x * y)) * y = y * y = 0,$$

即 BCI-2 成立.

如果 $x * y = y * x = 0$,由(2) 和(ii) 得

$$y = x * (x * y) = x * 0 = x,$$

这表明 BCI-4 成立.

所以 $\langle X; * ,0\rangle$ 是一个结合 BCI- 代数. □

定理 2.1.3 中(i) 和(ii) 还是独立的.

例 2.1.2　设 $X = \{0,1\}$, $*$ 表如下

*	0	1
0	0	0
1	0	0

则 $\langle X; * ,0\rangle$ 满足定理 2.1.3 中(i),不满足定理 2.1.3 中(ii).

例 2.1.3　设 $X = \{0,1\}$, $*$ 表如下

$*$	0	1
0	0	0
1	1	0

则$\langle X;*,0\rangle$满足定理 2.1.3 中(ii),不满足定理 2.1.3(i).

定理 2.1.4　(2,0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是一个结合 BCI-代数当且仅当它满足:$\forall\ x,y,z \in X$

(i)　$(x*y)*(x*z)=z*y$;

(ii)　$0*x=x$.　□

定理 2.1.5　(2,0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是一个结合 BCI-代数当且仅当它满足:$\forall\ x,y,z \in X$

(i)　$(x*y)*(x*z)=y*z$;

(ii)　$x*0=x$.　□

这两个定理是章仲英,岳振才[1]得到的,其证明类似于定理 2.1.3,故不再赘述.

本节以下 5 个定理均属于雷天德[1],主要讲述有限结合 BCI-代数的结构.

定理 2.1.6　设$\langle X;*,0\rangle$是一个结合 BCI-代数. 则 S 是 X 的子代数当且仅当 S 是 X 的理想.

证明　若 S 是 X 的子代数,必有 $0\in S$. 此外如果 $y*x\in S$ 和 $x\in S$,有

$$y=y*0=y*(x*x)=(y*x)*x\in S.$$

所以 S 是一个理想.

反之,设 S 是 X 的一个理想. 如果 $x,y\in S$,则

$$(x * y) * y = x * (y * y) = x * 0 = x \in S.$$

于是 $x * y \in S$. 这表明 S 是 X 的一个子代数. □

定理 2.1.7 有限结合 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是有限个 2 阶理想之积:

$$X = (a_1] \times \cdots \times (a_n].$$

证明 由定理 2.1.2,X 是元素皆对合的 Abel 群,所以 X 中的非零循环群只能是 2 阶的. 由群论中"有限指数的 Abel$p$- 群皆是其循环子群的直积"和定理 2.1.6 知,X 是有限个 2 阶理想之积. □

我们令

$$a^{\varepsilon} = \begin{cases} 0, 当\ \varepsilon = 0\ 时; \\ a, 当\ \varepsilon = 1\ 时. \end{cases}$$

则由结合性和直积条件的保证,X 中每一元素皆唯一地表示为

$$a_1^{\varepsilon_1} * \cdots * a_n^{\varepsilon_n},$$

这里 $\varepsilon_i = 0, 1$. 于是我们得

定理 2.1.8 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个有限结合 BCI- 代数,则 $X = \{a_1^{\varepsilon_1} * \cdots * a_n^{\varepsilon_n} : \varepsilon_i = 0, 1\}$. 从而 X 为 2^n 阶. 由此得,奇数阶及非 2^n 的偶数阶真 BCI- 代数一定不是结合的. □

下述定理给出存在问题的解答.

定理 2.1.9 任意 2^n 阶的结合 BCI- 代数是存在的,这里 $n \geq 1$.

证明　令 $X_0=\{0,1\}, 0*0=1*1=0, 1*0=0*1=1$，则 $\langle X_0; *, 0\rangle$ 是一个 2 阶结合 BCI- 代数. 这表明 $n=1$ 时结论成立.

对任意自然数 n，令

$$X=\overbrace{X_0\times\cdots\times X_0}^{n\text{个}},$$

其中 $0=(0,\cdots,0)$，$a=(a_1^{\varepsilon_1},\cdots,a_n^{\varepsilon_n})$，由于

$$\begin{aligned}0*a&=(0,\cdots,0)*(a_1^{\varepsilon_1},\cdots,a_n^{\varepsilon_n})\\&=(0*a_1^{\varepsilon_1},\cdots,0*a_n^{\varepsilon_n})\\&=(a_1^{\varepsilon_1},\cdots,a_n^{\varepsilon_n})\\&=a,\end{aligned}$$

所以 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 2^n 阶的结合 BCI- 代数. □

$2^n(n>0)$ 阶的非结合 BCI- 代数也存在.

例 2.1.4　$X=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$，$*$ 表如下

$$x*y=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant y\leqslant 2^n-1;\\ 1, & \text{当 } y<x<2^n-1,\ y\neq 0;\\ 2^n-1, & \text{当 } y<x=2^n-1,\ y\neq 0;\\ x, & \text{当 } y<x\leqslant 2^n-1,\ y=0,\end{cases}$$

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 2^n 阶的非结合 BCI- 代数.

结合 BCI- 代数的同构问题特别简单.

定理 2.1.10　设 $\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$ 和 $\langle X_2; *_2, 0_2\rangle$ 是两个有限阶的结合 BCI- 代数，则 $X_1\cong X_2$ 当且仅当 X_1 与 X_2 的阶相等.

证明　必要性显然.

充分性　若 X_1 和 X_2 都是 2^n 阶的，由定理 10.5.8,

$$X_1 = \{a_1^{\varepsilon_1} *_1 \cdots *_1 a_n^{\varepsilon_n}\},$$

$$X_2 = \{b_1^{\varepsilon_1} *_2 \cdots *_2 b_n^{\varepsilon_n}\}.$$

由于结合性及表示的唯一性，则在映射

$$a_1^{\varepsilon_1} *_1 \cdots *_1 a_n^{\varepsilon_n} \to b_1^{\varepsilon_1} *_2 \cdots *_2 b_n^{\varepsilon_n}$$

下，$X_1 \cong X_2$. □

我们用 Hom(X,Y) 表示 BCI- 代数 X 到 BCI- 代数 Y 的所有同态映射的集合，简记 Hom(X,X) 为 Hom(X). 1984 年 K. Iséki 和 A. B. Thaheem[1] 给出下述两个结果.

定理 2.1.11　假设 X 是一个结合 BCI- 代数，而 $f \in$ Hom(X), $g \in$ Hom(X)，则 $f * g \in$ Hom(X)，这里 $\forall x \in X$, $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$.

证明　对任意 $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
(f * g)(x * y) &= f(x * y) * g(x * y) \\
&= [f(x) * f(y)] * [g(x) * g(y)] \\
&= \{f(x) * [g(x) * g(y)]\} * f(y) \\
&= \{[f(x) * g(x)] * g(y)\} * f(y) \\
&= [f(x) * g(x)] * [g(y) * f(y)] \\
&= (f(x) * g(x)) * (f(y) * g(y)) \\
&= (f * g)(x) * (f * g)(y).
\end{aligned}$$

所以 $f * g \in$ Hom(X). □

定理 2.1.12　假设 X 是一个结合 BCI- 代数，则 $\langle$Hom(X); $*$, $0\rangle$ 是一个结合 BCI- 代数，其中 $*$ 如上一定理中所给，0 元是：$\forall x \in X$, $0(x) = 0$.

证明是平凡的. □

K. Iséki and A. B. Thaheem[1] 最后提出一个公开问题：对任意 BCI- 代数 X，$\langle \mathrm{Hom}(X); *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数吗？

C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1] 和 E. Y. Deeba and S. K. Goel[1] 都给出了否定的回答，但前者更简单，下面叙述这一结果.

设 $X = \{0,1,2\}$，$*$ 表如下

$*$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	2	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 定义 $g: X \to X$ 使得 $g(0) = g(1) = 0$，$g(2) = 2$，则 $g \in \mathrm{Hom}(X)$. 取 f 为 $X \to X$ 的恒等映射，即 $\forall\, x \in X, f(x) = x$，则 $f \in \mathrm{Hom}(X)$. 因为

$$\begin{aligned}(f * g)(1 * 2) &= f(1 * 2) * g(1 * 2)\\ &= (1 * 2) * 0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(f * g)(1) * (f * g)(2)\\ &\quad= (f(1) * g(1)) * (f(2) * g(2))\\ &\quad= (1 * 0) * (2 * 2) = 1;\end{aligned}$$

所以 $(f * g)(1 * 2) \neq (f * g)(1) * (f * g)(2)$. 这表明 $\mathrm{Hom}(X)$ 关于 $*$ 不封闭，更不会是一个 BCI- 代数.

2.2　p- 半单 BCI- 代数

雷天德[2]，[3]，T. D. Lei and C. C. Xi[1]，章仲英[1] 和 W.

A. Dudek[1]分别提出了广义结合BCI-代数，p-半单BCI-代数和对称BCI-代数的概念. 随着研究的深入，事实证明这几类代数是同一个代数，它已受到国内外的重视和广泛研究. 本节叙述这方面的一些主要结果，属于上述五篇文献的结果不再标明出处.

定义 2.2.1 BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$叫做是p-半单的，如果$B(X)=\{0\}$.

例 2.1.1 中的BCI-代数就是一个p-半单代数.

例 2.2.2 中的BCI-代数不是p-半单的，因为$B(X)=\{0,1\}$.

定理2.2.1 BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$是p-半单的，当且仅当X的每个元素是原子，即$X=L(X)$.

证明 "当"部分显然. 只证"仅当"部分于下.

$\forall\, x, y \in X$，如果$x * y = 0$，即$x \leqslant y$，则由定理 1.1.8 得

$$0 * (y * x) \leqslant x * y = 0,$$

所以$0 * (y * x) = 0$. 这表明$0 \leqslant y * x$，即$y * x \in B(X) = \{0\}$. 所以$y * x = 0$. 由 BCI-4 得$x = y$. 于是X的每个元素是原子.

□

利用这个定理和定理 1.3.1，得到p-半单代数的一系列等价条件.

定理2.2.2(J. Meng and X. L. Xin[1]) 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个BCI-代数，则下列条件等价：

(i) X是p-半单的；

(ii) $z * (z * x) = x, \forall\, x, z \in X$；

(iii) $(z*u)*(z*x)=x*u, \forall\, x,u,z\in X$;

(iv) $x*(z*y)=y*(z*x), \forall\, x,y,z\in X$;

(v) $(x*u)*(z*y)=(y*u)*(z*x), \forall\, x,y,z,u\in X$;

(vi) $(0*z)*(0*x)=x*z, \forall\, x,z\in X$;

(vii) $0*(0*x)=x, \forall\, x\in X$;

(viii) $0*(z*x)=x*z, \forall\, x,z\in X$;

(ix) $0*(0*(x*z))=x*z, \forall\, x,z\in X$;

(x) $z*(z*(x*u))=x*u, \forall\, x,u,z\in X$.

雷天德[2]称满足条件(vii)的 BCI- 代数为广义结合 BCI- 代数. 广义结合这一名称,反映了作者提出这一概念的想法. 由(vii)不难看出结合 BCI- 代数是 p- 半单的.

定理 2.2.3　设$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI- 代数,则下列条件等价:

(i) X 是 p- 半单的;

(ii) $0*x=0$ 蕴涵 $x=0, \forall\, x\in X$;

(iii) $x*(0*y)=y*(0*x), \forall\, x,y\in X$;

(iv) $(x*y)*(z*u)=(x*z)*(y*u), \forall\, x,y,z,u\in X$;

(v) $(x*y)*(z*y)=x*z, \forall\, x,y,z\in X$;

(vi) $x*(y*z)=(z*y)*(0*x), \forall\, x,y,z\in X$;

(vii) $y*x=z*x$ 蕴涵 $y=z, \forall\, x,y,z\in X$;

(viii) $x*y=x*z$ 蕴涵 $y=z, \forall\, x,y,z\in X$.

证明　(i)⇔(ii) 是显然的.

(i)⇒(iii). 因为(i)与定理 2.3.2 中(vii)和(viii)等价,所以由(i)得

$$x * (0 * y) = 0 * ((0 * y) * x)$$
$$= (0 * (0 * y)) * (0 * x)$$
$$= y * (0 * x).$$

(iii) 成立.

(iii)⇒(i). 若 $x \in B(X)$,即 $0 * x = 0$,由(iii) 得

$$x = x * (0 * 0) = 0 * (0 * x) = 0 * 0 = 0.$$

这表明 $B(X) = \{0\}$,(i) 成立.

以上证明了(i) ~ (iii) 彼此等价.

(i)⇒(iv). 因为(i) 和定理 2.2.2 中(iv) 等价,由定理 2.2.2 中(iv) 得

$$(x * y) * (z * u) = u * (z * (x * y))$$
$$= u * (y * (x * z))$$
$$= (x * z) * (y * u).$$

(iv) 成立.

(iv)⇒(v). 在(iv) 中令 $u = y$ 得(v).

(v)⇒(i). 由(v) 得

$$0 * (x * y) = (y * y) * (x * y) = y * x.$$

这表明定理 2.2.2 中(viii) 成立,而定理 2.2.2 中(viii) 与(i) 等价,所以(i) 成立.

(i)⇒(vi). 因为(i) 与(iv) 和定理 2.2.2(iv) 等价,于是

$$x * (y * z) = z * (y * x)$$
$$= (z * 0) * (y * x)$$
$$= (z * y) * (0 * x).$$

(vi) 成立.

(vi)⇒(i). 由(vi) 得

$$x * (0 * y) = (y * 0) * (0 * x) = y * (0 * x).$$

这表明(iii) 成立,于是(i) 成立.

(i)⇒(vii). 假设 $y * x = z * x$. 因为(i),定理 2.2.2 中(v) 和

定理 2.2.2 中(viii) 等价,所以

$$\begin{aligned} 0 &= (y * x) * (z * x) \\ &= (x * x) * (z * y) \\ &= 0 * (z * y) = y * z. \end{aligned}$$

同法可证 $z * y = 0$. 所以 $y = z$,(vii) 成立.

(vii)⇒(i). 假设 $x \in B(X)$,则 $0 * x = 0 = x * x$. 由(vii) 得 $x = 0$,所以 $B(X) = \{0\}$,(i) 成立.

(i)⇒(viii). 假设 $x * y = x * z$. 因为(i) 与定理 2.2.2(ii) 等价,所以

$$y = x * (x * y) = x * (x * z) = z.$$

(viii) 成立.

(viii)⇒(i). 设 $x \in B(X)$,则

$$0 * x = 0 = 0 * 0.$$

由(viii) 得 $x = 0$. (i) 成立. □

注 定理 2.2.3 中(vii) 和(viii) 由 D. J. Meng[1] 给出.

章仲英[1],[2] 称满足定理 2.2.3 条件(iv) 的 BCI- 代数为对称 BCI- 代数,W. A. Dudek[1] 称为 *Medial* BCI- 代数,上述两个定理表明 p- 半单 BCI- 代数,广义结合 BCI- 代数和对称 BCI- 代数这三个概念重合.

定理 2.2.4 (2,0) 型代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数当且仅当 $\forall\, x,y,z \in X$

(i) $(x * y) * (x * z) = z * y$;

(ii) $x * 0 = x$.

证明 “仅当”部分是显然的.“当”部分证明如下. 在(i) 中令

$y = z = 0$,由(ii)得

$$x * x = (x * 0) * (x * 0) = 0 * 0 = 0.$$

BCI-3 成立.

在(i)中令 $y = 0$,利用(ii)得

(1) $x * (x * z) = (x * 0) * (x * z) = z * 0 = z,$

结合 BCI-3 得

$$(x * (x * z)) * z = z * z = 0.$$

BCI-2 成立.

由 BCI-3 和(i)得

$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = (z * y) * (z * y) = 0,$

BCI-1 成立.

如果 $x * y = y * x = 0$,由(ii)和(1)得

$$x = x * 0 = x * (x * y) = y,$$

BCI-4 成立.

所以 $\langle X; * ,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 由定理 1.6.3 知它是 p- 半单的. □

(i)和(ii)显然是互相独立的.

J. Meng and Y. B. Jun[1] 也给出了 p- 半单 BCI- 代数一组简单公理系统.

定理 2.2.5(J. Meng and Y. B. Jun[1]) 一个(2,0)型代数 $\langle X; * ,0\rangle$ 是 p- 半单的当且仅当它满足

(i) $x * (y * z) = z * (y * x)$;

(ii) $x * 0 = x$;

(iii) $x * x = 0$. □

由这个定理知道,p- 半单 BCI- 代数簇是同余可换的. 它们的

证明留给读者.

为了揭示 p- 半单 BCI- 代数的结构,现在讨论它与 *Abel* 群之间的关系.

定理2.2.6　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个p-半单代数,在X上定义一个二元运算 $+$ 如下:

$$x + y = x * (0 * y).$$

则$\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 群.

证明　因 $x * (0 * y)$ 由 x, y 唯一确定,故 $+$ 是 X 上的一个二元运算. 现在验证 Abel 群的性质:

(1)　满足交换律,因为 X 满足条件(12).

(2)　满足结合律,由交换律得

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (y + z) + x \\ &= (y * (0 * z)) * (0 * x) \\ &= (y * (0 * x)) * (0 * z) \\ &= (y + x) + z \\ &= (x + y) + z. \end{aligned}$$

结合律成立.

(3)　0 是加法的零元. 事实上,由条件(7)

$$x + 0 = x * (0 * 0) = x,$$

$$0 + x = 0 * (0 * x) = x.$$

(4)　$0 * x$ 是 x 的负元. 事实上

$$x + (0 * x) = (0 * x) + x = (0 * x) * (0 * x) = 0.$$

所以$\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 群. □

群$\langle X; +, 0\rangle$ 叫做 p- 半单 BCI- 代数$\langle X; *, 0\rangle$ 的**伴随群**.

对于结合 BCI- 代数$\langle X; *, 0\rangle$,由于

$$x + y = x * (0 * y) = x * y,$$

所以运算 $+$ 与 $*$ 是一致的，从而 X 与其伴随群重合（即定理 1.5.2）.

相反地，可由任一个 Abel 群来构造 p- 半单 BCI- 代数.

定理 2.2.7 设 $\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 群，$-$ 是 $+$ 的逆运算，则 $\langle X; -, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

证明 由 Abel 群的性质易知 $\langle X; -, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 因为对于 $x \in X$,

$$0 - (0 - x) = x.$$

于是 $\langle X; -, 0\rangle$ 是 p- 半单的. □

我们称 $\langle X; -, 0\rangle$ 为 Abel 群 $\langle X; +, 0\rangle$ 的伴随 BCI- 代数.

一个 p- 半单 BCI- 代数的伴随群的伴随代数与原代数有何关系呢？下述定理回答了这一个问题.

定理 2.2.8 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，则它的伴随群 $\langle X; +, 0\rangle$ 的伴随代数就是原来的 $\langle X; *, 0\rangle$.

证明 只需注意到

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) = x + (0 * y) \\ &= x * (0 * (0 * y)) = x * y. \end{aligned}$$ □

于是任一个 p- 半单代数均可由某一个 Abel 群得到. 相反地，我们有

定理 2.2.9 设 $\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 群. 则它的伴随代数

$\langle X; *, 0\rangle$ 的伴随群就是$\langle X; +, 0\rangle$.

证明　设$\langle X; *, 0\rangle$ 的伴随群的加法运算是 $\oplus$. 则对于任意 $x, y \in X$, 由定理 1.6.5

$$x \oplus y = x * (0 * y) = x - (0 - y) = x + y.$$

这表明 $\oplus$ 与 $+$ 一致, 所以$\langle X; *, 0\rangle$ 的伴随群就是$\langle x; +, 0\rangle$. □

于是任一个 Abel 群均可由某一 p- 半单 BCI- 代数得到.

同构的 p- 半单代数的伴随群有何关系呢?我们有

定理 2.2.10　两个 p- 半单 BCI- 代数$\langle X; *, 0\rangle$ 和$\langle X'; *', 0'\rangle$ 同构当且仅当其伴随群$\langle X; +, 0\rangle$ 和$\langle X'; +', 0'\rangle$ 同构.

证明　必要性. 设 φ 是$\langle X; *, 0\rangle$ 到$\langle X'; *', 0'\rangle$ 上的一个同构映射. 则

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x * (0 * y)) \\ &= \varphi(x) *' (\varphi(0) *' \varphi(y)) \\ &= \varphi(x) *' (0' *' \varphi(y)) \\ &= \varphi(x) +' \varphi(y).\end{aligned}$$

这表明 φ 是$\langle X; +, 0\rangle$ 到$\langle X'; +', 0'\rangle$ 上的一个同态映射. 由于 $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$, 所以$\langle X; +, 0\rangle$ 与$\langle X'; +', 0'\rangle$ 同构.

充分性　设伴随群$\langle X; +, 0\rangle$ 与$\langle X'; +', 0'\rangle$ 间同构映射为 ψ. 现在证明在映射 ψ 下, 两个伴随代数$\langle X; -, 0\rangle$ 和$\langle X'; -', 0'\rangle$ 同构. 事实上, $\forall\, x, y \in X$,

$$\begin{aligned}\psi(x - y) &= \psi(x + (-y)) \\ &= \psi(x) +' \psi(-y) \\ &= x' +' (-y)' \\ &= x' -' y'\end{aligned}$$

$$= \psi(x) -' \psi(y).$$ □

以上定理 2.2.5 ～ 9 建立了 p- 半单 BCI- 代数与 Abel 群之间的紧密关系，使人们可以用 Abel 群的理论处理 p- 半单 BCI- 代数. 现在介绍 p- 半单 BCI- 代数的另一些性质.

定理 2.2.11 p- 半单 BCI- 代数的子代数，商代数，积代数仍为 p- 半单 BCI- 代数.

证明是平凡的. □

定理 2.2.12 p- 半单 BCI- 代数的每个子代数均是理想.

证明 假设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，S 是它的一个子代数. 显然 $0 \in S$. 如果 $x * y \in S$ 和 $y \in S$，由 S 关于 $*$ 的封闭性知 $0 * y \in S$，于是，由条件(13) 得

$$\begin{aligned} x &= (x * 0) * 0 = (x * 0) * (y * y) \\ &= (x * y) * (0 * y) \in S. \end{aligned}$$

所以 S 是一个理想. □

p- 半单 BCI- 代数是 BCI- 代数中目前研究最深入，结果最丰富的一类代数. 有兴趣的读者可参看雷天德[4].

借助于周期可以给出 p- 半单 BCI- 代数另一个特征.

定理 2.2.13(J. Meng and S. M. Wei [1]) 一个 BCI- 代数 X 是 p- 半单的当且仅当对每个 $x \neq 0$，有 $|x| > 1$.

证明 设 X 是 p- 半单的，则 $B(X) = \{0\}$. 因此，$x \neq 0$ 蕴涵

$x^1 = x \notin B(X)$,即 $|X| > 1$.

相反地,若 $x \neq 0$ 则 $|x| > 1$,即 $x \notin B(X)$. 这表明 $B(X) = \{0\}$,所以 X 是 p- 半单的. □

Y. L. Liu[1] 推广了 K. Iséki and A. B. Thaheem 的结果定理 2.1.12 到 p- 半单 BCI- 代数.

定理 2.2.14(Y. L. Liu[1])　设 X 是一个 BCI- 代数,Y 是一个 p- 半单 BCI- 代数,则 $\langle \mathrm{Hom}(X,Y); *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

证明　首先我们验证 $\forall f,g \in \mathrm{Hom}(X;Y)$,$f*g \in H(X,Y)$. 事实上 $\forall x,y \in X$,由定理 2.2.3(13) 有

$$\begin{aligned}(f*g)(x*y) &= f(x*y)*g(x*y)\\ &= (f(x)*f(y))*(g(x)*g(y))\\ &= (f(x)*g(x))*(f(y)*g(y))\\ &= (f*g)(x)*(f*g)(y).\end{aligned}$$

其次因为 $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned}(0*(0*f))(x) &= 0(x)*(0(x)*f(x))\\ &= 0*(0*f(x)) = f(x),\end{aligned}$$

所以 $0*(0*f) = f$. 这表明 $\langle \mathrm{Hom}(X;Y); *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单的. □

作为该定理的一个特殊情形有

定理 2.2.15(M. Aslam and A. B. Thaheem [1])　如果 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数,则 $\langle \mathrm{Hom}(X), *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数. □

Z. S. Tan[1] 引入了正则 BCI- 代数的概念. H. Jiang[5] 证明了这一概念与 p- 半单 BCI- 代数相同.

定义 2.2.2(Z. S. Tan[1]) 假设 X 是一个 BCI- 代数,如果对任意 $a \in X$ 均有 $a * X = X$ 和 $x * a = X$,则称 X 是一个**正则** BCI- 代数,这儿

$$a * X = \{a * x; x \in X\},$$
$$X * a = \{x * a; x \in X\}.$$

定理 2.2.16 一个 BCI- 代数 X 是正则的当且仅当 X 是 p- 半单的.

证明 必要性 设 X 是正则的,由定义 2.2.2 我们有

$$X = 0 * X = \{0 * x; x \in X\} = L(X).$$

所以 X 是 p- 半单的。

充分性 设 X 是 p- 半单的,则 $X = L(X)$. 任取 $a \in X$,由定理 2.2.2(ii) 知,对任意 $x \in X$ 恒有

$$x = a * (a * x) \in a * X.$$

所以 $X \subseteq a * X$. 相反的包含是显然的. 这就证明了 $X = a * X$. 另一方面,由定理 2.2.3(iv) 我们有

$$\begin{aligned} x &= (x * 0) * (a * a) \\ &= (x * a) * (0 * a) \\ &= (x * (0 * a)) * a \in X * a. \end{aligned}$$

所以 $X \subseteq X * a$. 相反的包含是显然的. 于是 $X = X * a$. 这就证明了 X 是正则的. □

蒲义书[1] 给出了 p- 半单 BCI- 代数的另一组较简单的公理

系统，我们不加证明地列在下面.

定理 2.2.17（蒲义书[1]）　设 X 是一个 BCI-代数，则 X 是 p-半单的当且仅当 X 满足：对任意 $x,y,z \in X$

(i)　$(x * y) * z = (x * z) * y$;

(ii)　$x * x = 0$;

(iii)　$0 * (0 * x) = x$.　□

2.3　拟结合 BCI-代数

前两节所介绍的结合 BCI-代数和 p-半单 BCI-代数，就序关系来看，它们的每一个元素皆为原子，即任意两个不同元素不可比较. 无疑这是比较简单的真 BCI-代数. 从本节开始，我们介绍较复杂的 BCI-代数.

1989 年张小红，章仲英[1]，1990 年 C. C. Xi[1] 分别提出了 T 型 BCI-代数和拟结合 BCI-代数的概念. 事实上这两个概念是相同的. 本节以"拟结合 BCI-代数"为题，介绍这两篇文章的结果.

定义 2.3.1　一个 BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 称为是拟结合的，如果它满足

(i)　$0 * (0 * x) = 0 * x,\ \forall\, x \in X$.

显然，每个 BCK-代数是拟结合 BCI-代数；结合 BCI-代数是拟结合 BCI-代数.

例 2.3.1　设 $X = \{0,1,2\}$，$*$ 如下

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个拟结合 BCI- 代数,但不是结合的.

例 2.3.2 设$X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 表如下

*	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个拟结合 BCI- 代数,但不是p- 半单的.

例 2.3.3 设$X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 表如下

*	0	1	2	3
0	0	3	0	1
1	1	0	1	3
2	2	3	0	1
3	3	1	3	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数,但不是拟结合的.

下述定理给出了拟结合 BCI- 代数的特征.

定理 2.3.1 设$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数,则下列条件等价:

(i) X 是拟结合的;

(ii)　$0*x \leqslant x, \forall\ x \in X$;

(iii)　$0*(x*y)=0*(y*x), \forall\ x,y \in X$;

(iv)　$(0*x)*y=0*(x*y), \forall\ x,y \in X$;

(v)　$(x*y)*(y*x) \in B(X), \forall\ x,y \in X$;

(vi)　$(x*y)*z \leqslant x*(y*z), \forall\ x,y,z \in X$;

(vii)　$L(X)$ 是一个结合 BCI- 代数.

证明　(i)⇒(ii)

$$0*x=0*(0*x) \leqslant x,$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(iii). 由定理 1.1.3,定理 1.1.4 和(ii) 得

$$\begin{aligned}0*(x*y) &= 0*\{0*[0*(x*y)]\}\\ &= 0*\{0*[(0*x)*(0*y)]\}\\ &= 0*\{[0*(0*x)]*[0*(0*y)]\}\\ &= 0*[(0*y)*(0*x)]\\ &= 0*(0*(y*x))\\ &\leqslant 0*(y*x).\end{aligned}$$

由对称性得相反的不等式. 所以(iii) 成立

(iii)⇒(iv)

$$\begin{aligned}0*(x*y) &= (0*x)*(0*y)\\ &= (0*(0*y))*x\\ &= (0*(y*0))*x\\ &= (0*x)*y,\end{aligned}$$

(iv) 成立.

(iv)⇒(v)

$$\begin{aligned}&0*[(x*y)*(y*x)]\\ =&[0*(x*y)]*(y*x)\\ =&[(0*x)*(0*y)]*(y*x)\end{aligned}$$

$$= \{[0 * (0 * y)] * x\} * (y * x)$$
$$= \{0 * [(0 * y) * x]\} * (y * x)$$
$$= \{0 * [0 * (y * x)]\} * (y * x)$$
$$= 0,$$

所以$(x * y) * (y * x) \in B(X)$. (v) 成立.

(v)⇒(i). 对 0 和 x 应用(v) 得

$$(0 * x) * x = (0 * x) * (x * 0) \in B(X),$$
$$x * (0 * x) = (x * 0) * (0 * x) \in B(X).$$

由定理 1.1.4 得

$$0 = 0 * ((0 * x) * x) = (0 * (0 * x)) * (0 * x),$$
$$0 = 0 * (x * (0 * x)) = (0 * x) * (0 * (0 * x)).$$

所以 $0 * x = 0 * (0 * x)$. (i) 成立.

以上证明了(i) ~ (v) 彼此等价.

(ii)⇒(vi)

$$((x * y) * z) * (x * (y * z))$$
$$= \{[x * (x * (y * z))] * y\} * z$$
$$= ((y * z) * y) * z$$
$$= (0 * z) * z$$
$$= 0, \qquad [由(ii)]$$

所以$(x * y) * z \leqslant x * (y * z)$. (vi) 成立.

(vi)⇒(vii). $\forall\, a \in L(X)$,则 $a = 0 * (0 * a)$. 由(vi) 有

$$a * (0 * a) = (a * 0) * (0 * a)$$
$$\leqslant a * (0 * (0 * a))$$
$$= a * a = 0,$$

于是 $a * (0 * a) = 0$.

另一方面,由(vi) 得

$$(0 * a) * a \leqslant 0 * (a * a) = 0 * 0 = 0.$$

因此$(0 * a) * a = 0$.

以上证明了 $\forall\, a \in L(X), a = 0 * a$. 所以 $L(X)$ 是 X 的一个结合 BCI- 子代数. (vii) 成立.

(vii)⇒(i). $\forall\, x \in X$, 由推论 1.3.3 知 $0 * x \in L(X)$. 由于 $L(X)$ 是结合的, 所以 $0 * (0 * x) = 0 * x$. (i) 成立. □

注　1987 年, C. S. Hoo[1] 称满足定理 2.3.1 条件(ii) 的 BCI- 代数为具有弱单位的, 由此定理知, 它等价于拟结合 BCI- 代数.

由定理 1.4.7 知 $X/B(X) \cong L(X)$, 所以有

推论 2.3.2　BCI- 代数 X 是拟结合的, 当且仅当 $X/B(X)$ 是结合的.

我们记 $S_x = \{0, 0 * x\}$.

定理 2.3.3　BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是拟结合的, 当且仅当 $\forall\, x \in X$, S_x 是 X 的子代数.

证明　必要性　若 X 是拟结合的, 则对于 $S_x = \{0, 0 * x\}$. 由于

$$(0 * x) * 0 = 0 * x \in S_x, 0 * (0 * x) = 0 * x \in S_x,$$

所以 S_x 是 X 的一个子代数.

充分性　假设 $\forall\, x \in X, S_x$ 是 X 的子代数, 则

$$0 * (0 * x) \in S_x.$$

这仅有二种可能:

(1)　$0 * (0 * x) = 0$. 由此得 $0 * x = (0 * (0 * x)) * x = 0$. 因此 $0 * x = 0 * (0 * x)$.

(2)　$0 * (0 * x) = 0 * x$.

总之, $\forall\, x \in X$, $0 * x = 0 * (0 * x)$. 所以 X 是拟结合的. □

记$G(X)=\{x\in X:x=0*x\}$,显然$G(X)\subseteq L(X)$. 称$G(X)$为X的结合部分或G-部分. 令

$$Q(X)=\bigcup\{V(a):a\in G(X)\},$$

称$Q(X)$为X的拟结合部分.

定理 2.3.4 设$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,则X有最大拟结合子代数$Q(X)$,而且$Q(X)$是X的一个理想.

证明 首先来证$G(X)$是X的一个结合子代数. 事实上,$\forall a,b\in G(X)$,有

$$0*(a*b)=(0*a)*(0*b)=a*b.$$

所以$a*b\in G(X)$. 我们不难看出$G(X)$是X的最大结合子代数.

现在来证$Q(X)$是X的一个拟结合子代数,$\forall x,y\in Q(X)$,$\exists a,b\in G(X)$使$x\in V(a)$和$y\in V(b)$,因此$x*y\in V(a*b)$. 由于$a*b\in G(X)$. 所以$x*y\in Q(X)$. 这说明$Q(X)$是X的一个子代数. 因为$L(Q(X))=G(X)$是结合的. 由定理2.3.1知$Q(X)$是拟结合的. 显然$Q(X)$是X的最大拟结合子代数. □

至此我们知道,每一个BCI-代数X,存在最大p-半单子代数,即$L(X)$;存在最大结合子代数$G(X)$;存在最大拟结合子代数$Q(X)$. 依次称它们为X的p-半单部分,结合部分,拟结合部分. 显然

$$G(X)\subseteq L(X),\ G(X)\subseteq Q(X).$$

关于拟结合BCI-代数的理想有

定理 2.3.5 拟结合BCI-代数的每个理想是一个子代数,即拟结合BCI-代数是优BCI-代数.

证明　设 X 是一个拟结合 BCI- 代数，I 是 X 的任一个理想，$\forall\, a \in I$，因为

$$0 * a = 0 * (0 * a) \leqslant a,$$

所以 $0 * a \in I$. 由定理 1.4.4 知 I 是 X 的一个子代数.　□

最后给出拟结合 BCI- 代数的周期刻画.

定理 2.3.6(J. Meng and S. M. Wei[1])　一个 BCI- 代数 X 是拟结合的当且仅当对任意 $x \in X$，$|x| \leqslant 2$.

证明　如果 X 是拟结合的，由定理 2.3.1(v) 有 $x * (0 * x) = (x * 0) * (0 * x) \in B(X)$，即 $x^2 \in B(X)$. 这表明对任意 $x \in X$，$|x| \leqslant 2$.

相反地，如果 $|x| = 2$，则 $x^2 \in B(X)$. 于是

$$\begin{aligned}
&(0 * x) * (0 * (0 * x)) \\
= {}& 0 * (x * (0 * x)) \\
= {}& 0 * x^2 \\
= {}& 0.
\end{aligned}$$

所以 $0 * x = 0 * (0 * x)$. 如果 $|x| = 1$ 则 $x \in B(X)$. 于是 $0 * x = 0 * (0 * x)$. 这表明 X 是拟结合的.　□

结合 BCI- 代数是 p- 半单的拟结合 BCI- 代数，因此我们有

定理 2.3.7　一个 BCI- 代数 X 是结合的当且仅当对任意 $x \neq 0$ 恒有 $|x| = 2$.

证明　这是定理 2.2.13 和 2.3.6 的一个直接结果.　□

所以 BCK- 代数,结合 BCI- 代数,拟结合 BCI- 代数都是周期 BCI- 代数.

2.4 可换 BCI- 代数

鉴于定理1.2.1,在BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$中引进下述条件是没有意义的

(1) $x*(x*y)=y*(y*x),\forall\ x,y\in X.$

但是我们仍然希望考察一类特殊的 BCI- 代数,它的 BCK- 部分是可换 BCK- 代数. 为此我们发现 J. Meng [8;定理 18(33)] 中的条件(2) 可供利用,这个条件曾于 1988 年最先发表在孟杰[2] 中.

定义 2.4.1 BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$叫做可换的,如果它满足

(i) $x\leqslant y$ 蕴涵 $x=y*(y*x),\forall\ x,y\in X.$

这一概念及下面的结果均属于孟杰,辛小龙[2] 和 M. A. Chaudhry[2].

例 2.4.1 可换 BCK- 代数均是可换 BCI- 代数.

例 2.3.2 是一个可换BCI- 代数,但不是可换BCK- 代数,因为 $0*3=3$. 于是可换 BCK- 代数类是可换 BCI- 代数类的一个真子类.

由定义不难看出,结合 BCI- 代数,p- 半单 BCI- 代数均是可换 BCI- 代数. 值得注意的是,例 2.3.2 不是 p- 半单的,因为 $B(X)=\{0,1\}$. 所以 p- 半单 BCI- 代数类是可换 BCI- 代数类的真子类.

例 2.4.2　$X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表如下

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数，但不是可换的，因为 $1 \leqslant 2$，$2*(2*1) = 2*2 = 0 \neq 1$.

由上述说明，可换 BCI- 代数类是 BCI- 代数类的一个真子类，而它又以可换 BCK- 代数，p- 半单 BCI- 代数类为真子类. 因此是值得研究的.

定理 2.4.1　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个可换 BCI- 代数，则它的 BCK- 部分 $B(X)$ 是一个可换 BCK- 代数.

证明　设 $x, y \in B(X)$. 则 $x*(x*y) \leqslant x$. 由定理 1.1.2(v) 得：

$$y*x \leqslant y*[x*(x*y)],$$

$$y*\{y*[x*(x*y)]\} \leqslant y*(y*x).$$

因为 $x*(x*y) \leqslant y$，由 BCI- 代数 X 的可换性得：

$$x*(x*y) = y*\{y*[x*(x*y)]\} \leqslant y*(y*x).$$

所以 $x*(x*y) = y*(y*x)$. 这就证明了，$B(X)$ 是一个可换 BCK- 代数. □

1984 年，Q. P. Hu and K. Iséki[2] 引入了满足条件(2) 的 BCI- 代数.

(2)　$(x*(x*y))*(x*y)=y*(y*x)$.

这类代数和可换 BCI- 代数有何关系呢?我们有

定理 2.4.2　满足条件(2) 的 BCI- 代数是可换的,但反之不真.

证明　假设BCI- 代数$\langle X;*,0\rangle$满足条件(3). 如果$x\leqslant y$,则$x*y=0$. 由(2) 得

$$x=(x*0)*0=(x*(x*y))*(x*y)=y*(y*x).$$

所以 X 是可换的.

定理的后半部分由下例说明

例 2.4.3　$X=\{0,1,2,3,4\}$, $*$ 表如下

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
3	3	2	1	0	1
4	4	2	1	1	0

则$\langle X;*,0\rangle$ 是一个可换 BCI- 代数. 但不满足条件(2),因为

$$(3*(3*4))*(3*4)=(3*1)*1=2*1=1,$$

$$4*(4*3)=4*1=2,$$

$$(3*(3*4))*(3*4)\neq 4*(4*3).$$ □

定理 2.4.3　假设$\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 如果 X 的 BCK- 部分 $B(X)$ 是可换 BCK- 代数,

$$A(X)=\{x\in X:0*x\neq 0\}\cup\{0\}$$

是 p- 半单 BCI- 代数,则 X 是可换 BCI- 代数.

证明　$A(X)$ 是 p-半单的，则 $A(X)=L(X)$. 如果 $x\leqslant y$，则 $x*y=0\in B(X)$. 由定理 1.4.7，x 和 y 属于同一个分支. 若 $x,y\in B(X)$，因 $B(X)$ 是可换 BCK-代数，则

$$x=x*0=x*(x*y)=y*(y*x).$$

若 $x,y\notin B(X)$，则 $x=y$，$x=y*(y*x)$. 所以 X 是一个可换 BCI-代数. □

下面我们给出可换 BCI-代数一个特征条件.

定理 2.4.4　BCI-代数 $\langle X;*,0\rangle$ 是可换的，当且仅当对每个 $a\in L(X)$ 有

$$x*(x*y)=y*(y*x),\ \forall\ x,y\in V(a).$$

证明　必要性　假设 $\langle X;*,0\rangle$ 是可换的，$a\in L(X)$，且 $x,y\in V(a)$. 因为 $y*(y*x)\leqslant x$，由定义 2.4.1 得

$$(3)\quad y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))).$$

注意 $x*y\in B(X)$ 和 $y*x\in B(X)$，即

$$0*(x*y)=0*(y*x)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&(y*(y*x))*(x*(x*y))\\
&=\{x*[x*(y*(y*x))]\}*[x*(x*y)] && [\text{由}(4)]\\
&=\{x*[x*(x*y)]\}*\{x*[y*(y*x)]\}\\
&=(x*y)*\{x*[y*(y*x)]\}\\
&=\{x*[x*(y*(y*x))]\}*y\\
&=[y*(y*x)]*y && [\text{由}(4)]\\
&=(y*y)*(y*x)\\
&=0*(y*x)
\end{aligned}$$

$= 0.$

由对称性得$(x*(x*y))*(y*(y*x)) = 0$. 所以

$$x*(x*y) = y*(y*x).$$

充分性　假设对每个$a \in L(X)$和任意$x,y \in V(a)$有

(4)　$x*(x*y) = y*(y*x)$

当$x \leqslant y$时,则x和y属于同一个分支$V(0*(0*x))$. 于是

$$x = x*0 = x*(x*y) = y*(y*x).$$

所以X是可换的. □

现在讨论可换BCI-代数的结构.

定理 2.4.5　可换BCI-代数的每个分支是一个下半格.

证明　假设$\langle X; *, 0\rangle$是一个可换BCI-代数,$a \in L(X)$. $\forall\, x,y \in V(a)$,定义

$$x \wedge y = x*(x*y) = y*(y*x).$$

显然$x \wedge y \leqslant x,y$.

若$z \leqslant x,y$,由定义2.4.1得

$$z = x*(x*z) = y*(y*z),$$

因此

$$z = x*(x*(y*(y*z))).$$

由$z \leqslant y$和$z = y*(y*z)$得$y*(y*z) \leqslant y$. 代入上式得

$$z = x*(x*(y*(y*z))) \leqslant x*(x*y) = x \wedge y.$$

所以$\langle V(a), \wedge\rangle$是一个下半格. □

定义 2.4.2　BCI-代数$\langle X; *, 0\rangle$叫做局部有界的,如果每个分支$V(a)$有最大元m_a.

显然有界 BCK- 代数是局部有界 BCI- 代数. 例 2.3.2 和例 2.4.2 均是局部有界 BCI- 代数,但不是 BCK- 代数.

定理 2.4.6　局部有界可换 BCI- 代数 $\langle X;*,0\rangle$ 的每个分支 $V(a)$ 是一个格.

证明　对于 $x,y\in V(a)$,定义

$$x\vee y=m_a*((m_a*x)\wedge(m_a*y)),$$

由定理 2.4.5,这是良定的. 利用定义 2.4.1 和定理 2.4.5

$$\begin{aligned}x&=m_a*(m_a*x)\\&\leqslant m_a*((m_a*x)\wedge(m_a*y))\\&=x\vee y.\end{aligned}$$

同理可证 $y\leqslant x\vee y$.

若 $z\geqslant x$ 和 $z\geqslant y$,则 $m_a*x\geqslant m_a*z$, $m_a*y\geqslant m_a*z$. 由定理 2.4.5, $m_a*z\leqslant(m_a*x)\wedge(m_a*y)$. 因此

$$\begin{aligned}x\vee y&=m_a*((m_a*x)\wedge(m_a*y))\\&\leqslant m_a*(m_a*z)=z.\end{aligned}$$

结合定理 2.4.5 知 $\langle V(a);\vee,\wedge\rangle$ 是一个格. □

为了给出更深入的结果,需要下述

定理 2.4.7　假设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个局部有界可换 BCI- 代数,令 $f_a:V(a)\to B(X)$ 使得 $\forall x\in V(a)$, $f_a(x)=m_a*x$. 则 f_a 是一个逆序映射,且 $f_a(V(a))$ 是 $B(X)$ 的一个有界可换子代数,最大元为 m_a*a.

证明　因为 $\forall x,y\in V(a)$,

$$(m_a*x)*(m_a*y)=(m_a*(m_a*y))*x=y*x,$$

所以 $y \leqslant x$ 等价于 $m_a * x \leqslant m_a * y$，即 f_a 是一个逆序映射. 另一方面，令 $z = m_a * (y * x)$，由定理 1.3.6 知 $z \in V(a)$，现在证明

$$m_a * z = (m_a * x) * (m_a * y).$$

事实上，

$$\begin{aligned}
&((m_a * x) * (m_a * y)) * (m_a * z) \\
&= \{[m_a * (m_a * z)] * (m_a * y)\} * x \\
&= [z * (m_a * y)] * x \\
&= \{[m_a * (y * x)] * (m_a * y)\} * x \\
&= \{[m_a * (m_a * y)] * (y * x)\} * x \\
&= (y * (y * x)) * x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(m_a * z) * [(m_a * x) * (m_a * y)] \\
&= \{m_a * [m_a * (y * x)]\} * (y * x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以 $m_a * z = (m_a * x) * (m_a * y)$. 这表明 $f_a(V(a))$ 关于运算 $*$ 是封闭的. 因此 $V(a)$ 是 $B(X)$ 的一个子代数.

因为 a 是 $V(a)$ 的最小元，f_a 是逆序映射，所以 $m_a * a$ 是 $f_a(V(a))$ 的最大元. 因此 $\langle f_a(V(a)); *, 0\rangle$ 是 $B(X)$ 的一个有界可换子代数. □

定理 2.4.8 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个局部有界可换 BCI-代数，则

(i) 每个分支 $V(a)$ 是一个分配格；

(ii) $B(X)$ 是一个链蕴涵每个分支 $V(a)$ 是一个链；

(iii) $|V(a)| \leqslant |B(X)|, \forall a \in L(X)$.

证明 由定理 2.4.7 和 J. Meng and Y. B. Jun [3; 定理 7.3.3]（或 T. Traczyk[1]）知(i)成立. (ii)和(iii)是定理 2.4.7 的直接结果. □

定理 2.4.9　设$\langle X;*,0\rangle$是一个局部有界可换BCI-代数,则$\forall\ a\in L(X)$恒有$m_a*B(X)=V(a)$,这儿$m_a*B(X)=\{m_a*x:x\in B(X)\}$.

证明　设$y\in m_a*B(X)$,则存在$x\in B(X)$使$y=m_a*x$.由定理 1.3.6 知$y\in V(a)$.因此$m_a*B(X)\subseteq V(a)$.

反之,若$y\in V(a)$,则$y\leqslant m_a$.由定义 2.4.1,$y=m_a*(m_a*y)$.而$m_a*y\in B(X)$.所以$y\in m_a*B(X)$,即$V(a)\subseteq m_a*B(X)$. □

最后,我们证明可换 BCI-代数类构成代数簇,即可用一组恒等式定义.

定理 2.4.10　设$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI-代数,则X是可换的当且仅当X满足:对任意$x,y\in X$,

(i)　$y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x)))$.

证明　必要性　设X是可换的.因为$y*(y*x)\leqslant x$,由定义 2.4.1 得

$$y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))).$$

充分性　设(i)成立.如果$y\leqslant x$,则$y*x=0$.由(i)得

$$y=x*(x*y),$$

所以X是可换的. □

定理 2.4.11　一个(2,0)型代数$\langle X;*,0\rangle$是可换 BCI-代数当且仅当它满足 BCI-1 和

(i)　$y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x)))$;

(ii) $x * 0 = x$.

证明 必要性由定理 2.4.10 可得. 仅证充分性于下.
如果 $x * y = y * x = 0$, 由(i) 和(ii) 得

$$\begin{aligned} y &= y * 0 \\ &= y * (y * x) \\ &= x * (x * (y * (y * x))) \\ &= x * (x * (y * 0)) \\ &= x * (x * y) \\ &= x * 0 = x. \end{aligned}$$

BCI-4 成立. 由定理 1.1.5 知 $\langle X; *, 0\rangle$ 是可换 BCI- 代数. □

由此定理得

推论 2.4.12 可换 BCI- 代数类是一个代数簇. p- 半单 BCI- 代数簇和可换 BCK- 代数簇是它的真子簇.

注 几乎与 J. Meng and X. L. Xin[2] 的同时, M. A. Chaudhry [2] 也讨论了可换 BCI- 代数, 他的定义就是本节定理 4. 他也得到了本节定理 10 和 11. 定理 6 的充分性是 M. A. Chaudhry [2] 得到的. 早在 1986 年, 刘大宏[1] 就用定理 4 定义了可换 BCI- 代数.

Y. B. Jun and E. H. Roh [1] 给出了可换性另一等价条件如下.

定理 2.4.13 一个 BCI- 代数 X 是可换的当且仅当对任意 $x, y, z \in X$, $x \leqslant z$ 和 $z * y \leqslant z * x$ 蕴涵 $x \leqslant y$.

证明　设 X 可换且 $x \leqslant z$ 和 $z * y \leqslant z * x$，则 $x = z * (z * x) \leqslant z * (z * y) \leqslant y$，因此 $x \leqslant y$. 相反地，若 X 满足：$x \leqslant z$ 和 $z * y \leqslant z * x$ 蕴涵 $x \leqslant y$. 设 $u \leqslant v$. 因为 $v * (v * (v * u)) \leqslant v * u$，我们有 $u \leqslant v * (v * u)$. 相反的不等式是平凡的. 于是 $u = v * (v * u)$. 所以 X 可换. □

2.5　关联 BCI-代数

定义 2.5.1　BCI-代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做关联的，如果它满足

(i)　$(x * (x * y)) * (y * x) = y * (y * x)$.

例 2.5.1　关联 BCK-代数必是关联 BCI-代数（见 J. Meng and Y. B. Jun[3;Chapter I,Theorem6.7]）.

例 2.5.2　容易验证，p-半单 BCI-代数是关联的.

例 2.2.2 是一个关联 BCI-代数.

定理 2.5.1　关联 BCI-代数的 BCK-部分是一个关联 BCK-代数.

证明　由定义 5.2.1 立即可得. □

定理 2.5.2　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI-代数. 如果 $B(X)$ 是一个关联 BCK-代数，$A(X)$ 是 p-半单的，则 X 是一个关联 BCI-代数.

证明是容易的，故略. □

定理 2.5.3 关联 BCI-代数必是可换的.

证明 设$\langle X;*,0\rangle$是一个关联 BCI-代数. 如果$x\leqslant y$，则$x*y=0$. 由(1)得

$$\begin{aligned} x &= x*(x*y) \\ &= (y*(y*x))*(x*y) \\ &= y*(y*x). \end{aligned}$$

所以X是可换的. □

由此可得

定理 2.5.4 局部有界关联 BCI-代数的每个分支是一个分配格.

为了得出进一步结果，先给出下述引理.

引理 2.5.5 设$\langle X;*,0\rangle$是一个关联 BCI-代数，则$\forall x,y\in X$，$x\leqslant y$蕴涵$x=x*(y*x)$. 特别地，$\forall x\in V(a)$，$x=x*(m_a*x)$.

证明 若$x\leqslant y$，由定理 2.5.3 得

$$\begin{aligned} x &= y*(y*x) \\ &= (x*(x*y))*(y*x) \\ &= (x*0)*(y*x) \\ &= x*(y*x). \end{aligned}$$

□

引理2.5.6　设$\langle X;*,0\rangle$是一个局部有界关联BCI-代数，则$\forall x\in V(a)$，$x^*=m_a*(x*a)$是x的补元，即$x\wedge x^*=a$，$x\vee x^*=m_a$.

证明　由定理1.3.6知m_a*a，$x*a$，$m_a*x\in B(X)$和$x^*\in$ BCI-代数$V(a)$. 利用定理1.3.2～3得

$$
\begin{aligned}
&(x\wedge x^*)*a\\
&=[x^*(x^*x)]*a\\
&=\{[m_a*(x*a)]*[(m_a*(x*a))*x]\}*a\\
&=[(m_a*a)*(x*a)]*[(m_a*x)*(x*a)]\\
&=[(m_a*a)*(m_a*x)]*(x*a)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

因为$a\in L(X)$，所以$x\wedge x^*=a$.

$$
\begin{aligned}
&(m_a*x)\wedge(m_a*x^*)\\
&=(m_a*x)*[(m_a*x)*(m_a*x^*)]\\
&=(m_a*x)*(x^**x)\\
&=(m_a*x)*\{[m_a*(x*a)]*x\}\\
&=(m_a*x)*[(m_a*x)*(x*a)]\\
&=(x*a)*[(x*a)*(m_a*x)] && [\text{由 } B(X) \text{ 可换性}]\\
&=(x*a)*\{[x*(m_a*x)]*a\}\\
&=(x*a)*(x*a) && [\text{由引理 } 1.9.5]\\
&=0,
\end{aligned}
$$

所以

$$x\wedge x^*=m_a*((m_a*x)\wedge(m_a*x^*))=m_a. \qquad \square$$

综合定理2.5.4和引理2.5.6得

定理2.5.7　局部有界关联BCI-代数的每个分支是一个布

尔代数.

定理 2.5.8 局部有界关联BCI-代数X的分支$V(a)$是一个链当且仅当$|V(a)| \leqslant 2$.

证明 若$V(a)$是一个链,由定理2.4.7知,$f_a(V(a))$是$B(X)$的一个有界关联子代数,而且也是一个链.由J. Meng and Y. B. Jun[3;定理7.1.4]知$|f_a(V(a))| \leqslant 2$.由于$f_a:V(a) \to B(X)$是一个逆序映射,所以$|V(a)| \leqslant 2$.

相反的结论由定理2.4.9即知. □

根据上述结果,我们列出2,3,4阶局部有界关联BCI-代数,这儿要求$|B(X)| = 2$.

$X = \{0,1\}$, $*$ 表为

*	0	1
0	0	0
1	1	0

1
0

则$\langle X; *, 0\rangle$是关联BCI-代数,也是关联BCK-代数.

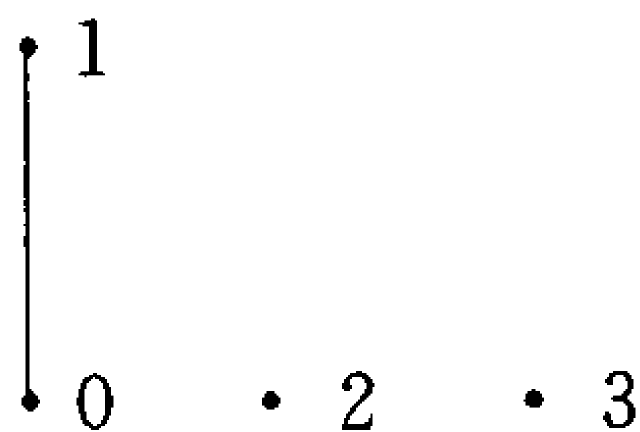
$X = \{0,1,2\}$, $*$ 表为

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

1
0 · 2

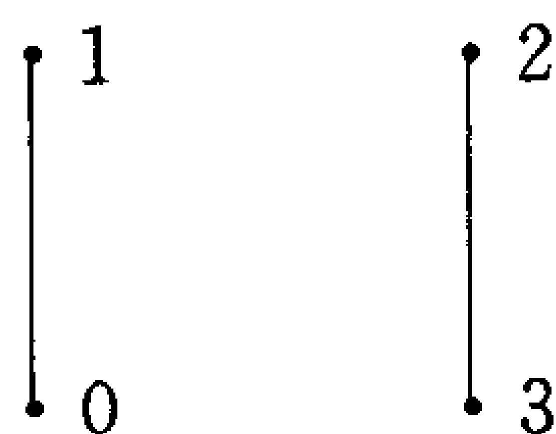
$X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表为

$*$	0	1	2	3
0	0	0	3	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	3
3	3	3	2	0



$X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表为

$*$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0



最后讨论代数簇的问题.

定理 2.5.9　一个(2,0)型代数$\langle X; *, 0\rangle$是关联 BCI- 代数当且仅当它满足 BCI-1 和

(i)　$(x*(x*y))*(y*x) = y*(y*x)$;

(ii)　$x*0 = x$.

证明　必要性显然. 充分性证明如下.

若 $x*y = y*x = 0$，由(i)和(ii)得

$$\begin{aligned} x &= x*(x*y) \\ &= (y*(y*x))*(x*y) \\ &= (y*0)*0 = y, \end{aligned}$$

BCI-4 成立.

由定理 1.1.6 知 X 是一个关联 BCI- 代数.　□

推论 2.5.10 关联BCI-代数类是一个代数簇;关联BCK-代数簇是它的一个真子簇;关联BCI-代数簇是可换BCI-代数簇的一个真子簇.

本节结果引自孟杰,辛小龙[4].

2.6 正定关联BCI-代数

为了引进正定关联BCI-代数,首先给出正定关联BCK-代数的等价条件.

定理 2.6.1 在BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$中,下列条件等价:

(i) X是正定关联的,即X满足

$$(x*y)*z=(x*z)*(y*z);$$

(ii) $x*y=(x*y)*y$;

(iii) $(x*(x*y))*(y*x)=x*(x*(y*(y*x)))$;

(iv) $x*y=(x*y)*(x*(x*y))$;

(v) $x*(x*y)=(x*(x*y))*(x*y)$;

(vi) $(x*(x*y))*(y*x)=(y*(y*x))*(x*y)$.

证明 (i)⇒(ii) 在(i)中令$y=z$得

$$\begin{aligned}x*y&=(x*y)*(y*y)\\&=(x*y)*y,\end{aligned}$$

(ii)成立.

(ii)⇒(iii) 在(ii)中以$x*[y*(y*x)]$代替y得

$$\begin{aligned}&x*\{x*[y*(y*x)]\}\\&=\{x*[x*(y*(y*x))]\}*\{x*[y*(y*x)]\}\end{aligned}$$

$$\leqslant [y*(y*x)]*\{x*[y*(y*x)]\}$$
$$\leqslant [y*(y*x)]*(x*y)$$
$$=(y*(x*y))*(y*x)$$
$$=\{[y*(x*y)]*(y*x)\}*(y*x) \qquad [由(ii)]$$
$$\leqslant (x*(x*y))*(y*x).$$

相反的不等式显然成立. 所以(iii) 成立.

(iii)⇒(iv). 在(iii) 中以 $y*x$ 代替 x，由 $(y*x)*y=0$ 得

$$(y*x)*(y*(y*x))$$
$$=(y*x)*\{(y*x)*[y*(y*(y*x))]\}$$
$$=(y*x)*[(y*x)*(y*x)]$$
$$=y*x,$$

(iv) 成立.

(iv)⇒(v). 在(iv) 中以 $x*y$ 代替 y 得

$$x*(x*y)$$
$$=[x*(x*y)]*\{x*[x*(x*y)]\}$$
$$=(x*(x*y))*(x*y),$$

(v) 成立.

(v)⇒(vi). (v) 式两边右 $*$ 乘 $y*x$ 得

$$(x*(x*y))*(y*x)$$
$$=\{[x*(x*y)]*(x*y))*(y*x)$$
$$\leqslant (y*(x*y))*(y*x)$$
$$=(y*(y*x))*(x*y),$$

由对称性得相反的不等式. (vi) 成立.

(vi)⇒(ii)　在(vi) 中用 $x*y$ 代替 y 得

$$x*y=\{x*[x*(x*y)]\}*0$$
$$=\{x*[x*(x*y)]\}*[(x*y)*x]$$
$$=\{(x*y)*[(x*y)*x]\}*[x*(x*y)]$$
$$=(x*y)*[x*(x*y)]$$

$$= \{x * [x * (x * y)\} * y]$$
$$= (x * y) * y,$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(i) 由(ii)得

$$[(x * z) * (y * z)] * [(x * y) * z]$$
$$= \{[(x * z) * z] * (y * z)\} * [(x * y) * z]$$
$$\leqslant [(x * y) * y] * [(x * y) * z]$$
$$= 0.$$

显然$[(x * y) * y] * [(x * z) * (y * z)] = 0$. (i) 成立. □

满足上述(ii), (iv), (v) 和(vi) 中任一个的 BCI- 代数必是 BCK- 代数. 然而p-半单BCI-代数满足条件(iii). 但是一般的BCI-代数不满足(iii). 事实上我们仅有:在任一 BCI- 代数 X 中有不等式

$$(1) \quad (x * (x * y)) * (y * x) \leqslant x * (x * (y * (y * x))).$$

证明 由于

$$[(x * (x * y)) * (y * x)] * [x * (x * (y * (y * x)))]$$
$$\leqslant \{[x * (x * (x * (y * (y * x))))] * (x * y)\} * (y * x)$$
$$= \{[x * (y * (y * x))] * (x * y)\} * (y * x)$$
$$\leqslant \{y * [y * (y * x)]\} * (y * x)$$
$$= (y * x) * (y * x)$$
$$= 0,$$

所以(1) 成立. □

定义 2.6.1 满足上述(iii) 的 BCI- 代数叫做*正定关联的*.

由定理 2.6.1 知正定关联 BCK- 代数类是正定关联 BCI- 代数

类的真子类,正定关联 BCI- 代数的 BCK- 部分是一个正定关联 BCK- 代数.

例 2.6.1　设 $X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 表为

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个正定关联 BCI- 代数,既非 BCK- 代数亦非 p-半单 BCI- 代数.

定理 2.6.2　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 若它的 BCK- 部分 $B(X)$ 是一个正定关联 BCK- 代数, $A(X)$ 是 p- 半单 BCI- 代数,则 X 是一个正定关联 BCI- 代数.

证明　若 $x, y \in B(X)$ 或 $x, y \in L(X)$,则 x 和 y 显然适合定理 2.6.1 中(iii).

若 $x \in B(X) - \{0\}$, $y \in A(X) - \{0\}$,则 $x * (x * y) = y$, $y * x = y$. 于是

$$(x * (x * y)) * (y * x) = y * y = 0,$$

$$\begin{aligned} x * (x * (y * (y * x))) &= x * (x * (y * y)) \\ &= x * x = 0, \end{aligned}$$

因此 x 和 y 满足定理 2.6.1 中(iii).

所以 X 是一个正定关联 BCI- 代数.　□

现在,我们已经引入了可换、关联、正定关联 BCI- 代数,它们之间有何关系?下述定理说明它们之间的关系与相应 BCK- 代数

之间关系相同.

定理 2.6.3 BCI-代数$\langle X;*,0\rangle$是关联的当且仅当它既是可换的又是正定关联的.

证明 设X是关联的.由定理 2.5.3 知X是可换的,于是

$$y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))).$$

由于X是关联的,我们有

$$y*(y*x)=(x*(x*y))*(y*x).$$

结合这两式便得

$$(x*(x*y))*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))).$$

所以X也是正定关联 BCI-代数.

相反地,设X既是可换的又是正定关联的,则X满足

$$y*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))),$$

$$(x*(x*y))*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))).$$

结合此二式得

$$y*(y*x)=(x*(x*y))*(y*x),$$

所以X是关联的. □

本节结果引自孟杰,辛小龙[5].

2.7 弱正定关联,弱关联和弱可换 BCI-代数

为了推广可换,关联,正定关联 BCK-代数的概念到 BCI-代数,M. A. Chaudhry [1] 引入了弱关联,弱正定关联,弱可换 BCI-

代数. 本节将证明弱正定关联 BCI-代数等价于正定关联 BCI-代数.

定义 2.7.1　一个 BCI-代数叫做弱正定关联的,如果它满足

$$(x*y)*z=((x*z)*z)*(y*z).$$

定理 2.7.1　每个 p-半单 BCI-代数是弱正定关联的.

证明　设 X 是一个 p-半单 BCI-代数,且 $x,y,z\in X$. 由定理 2.2.2(iv),

$$\begin{aligned}&((x*z)*z)*(y*z)\\=&((z*z)*x)*(y*z)\\=&(0*x)*(y*z)\\=&((y*z*x)*0\\=&(y*z)*x\\=&(x*z)*y\\=&(x*y)*z,\end{aligned}$$

所以 X 是弱正定关联的. □

推论 2.7.2　每个结合 BCI-代数是弱正定关联的.

定理 2.7.3　每个正定关联 BCK-代数是一个弱正定关联 BCI-代数.

证明　设 X 是一个正定关联 BCK-代数,则

$$\begin{aligned}((x*z)*z)*(y*z)&=(x*z)*(y*z)\\&=(x*y)*z.\end{aligned}$$

所以 X 是一个弱正定关联 BCI-代数. □

推论 2.7.4 每个关联 BCK-代数是一个弱正定关联 BCI-代数.

定理 2.7.5 BCI-代数 X 是弱正定关联的当且仅当它满足

(i) $x*y=((x*y)*y)*(0*y)$.

证明 设 X 是弱正关联的,则 $\forall\, x,y\in X$,

$$((x*y)*y)*(0*y)=(x*0)*y=x*y,$$

(i) 成立.

反之,假设 X 满足(1). 记 $s=(x*z)*z$,则 $\forall\, x,y,z\in X$,

$$\begin{aligned}&[(x*y)*z]*\{[(x*z)*z]*(y*z)\}\\=&[(x*z)*y]*\{[(x*z)*z]*(y*z)\}\\=&\{[s*(0*z)]*y\}*[s*(y*z)]\\=&\{[s*(s*(y*z))]*(0*z)\}*y\\\leqslant&[(y*z)*(0*z)]*y\\\leqslant&(y*0)*y\\=&0,\end{aligned}$$

于是

$$(x*y)*z\leqslant((x*z)*z)*(y*z).$$

相反的不等式是显然的. 因此

$$((x*z)*z)*(y*z)=(x*y)*z,$$

即 X 是弱正定关联的. □

推论 2.7.6 若 X 是一个弱正定关联 BCI-代数,则它的 BCK-部分 $B(X)$ 是一个正定关联 BCK-代数.

证明 因为 $x\in B(X)$ 蕴涵 $0*x=0$,所以当 $x,y\in B(X)$

时，定理 2.7.5 中(i) 式变为 $x*y=(x*y)*y$. 于是 $B(X)$ 是一个正定关联 BCK- 代数. □

这个推论告诉我们，弱正定关联 BCI- 代数类是 BCI- 代数的一个真子类.

定理 2.7.7　BCI- 代数 X 是弱正定关联的则它满足

(i)　$(x*(x*y))*(y*x)$
$$=\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y).$$

证明　因为

$$\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y)$$
$$\leqslant (x*(y*x))*(x*y)$$
$$=(x*(x*y))*(y*x),$$

所以

$$\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y)$$
$$\leqslant [x*(x*y)]*(y*x).$$

为了简单，记 $s=x*y$, $t=y*x$. 在定理 2.7.5(i) 中用 s 替换 y 得

$$x*s=[(x*s)*s]*(0*s).$$

上式两边右 $*$ 乘 t 有

$$(x*(x*y))*(y*x)$$
$$=\{[(x*s)*s]*(0*s)\}*t$$
$$\leqslant [(y*s)*(0*s)]*t$$
$$=\{[(y*s)*t]*[(0*s)*t] \qquad [\text{由定义 } 2.7.1]$$
$$=[(y*s)*t]*t$$
$$=\{[y*(y*x)]*(x*y)\}*(y*x),$$

以上运算中利用了下述结果

$$[0*(x*y)]*(y*x)$$

$$= [(0*x)*(0*y)]*(y*x)$$
$$= \{[0*(y*x)]*(0*y)\}*x$$
$$= \{[(0*y)*(0*x)]*(0*y)\}*x$$
$$= [0*(0*x)]*x$$
$$= 0.$$

于是(i)得证. □

弱正定关联 BCI-代数和正定关联 BCI-代数有何关系?Y. S. Huang[1] 和 M. A. Chaudhry[3] 证明了二者是等价的.

定理 2.7.8(Y. S. Huang[1]) 一个 BCI-代数是正定关联的当且仅当它是弱正定关联的.

证明 设 BCI-代数 X 是正定关联的,则

(1) $(x*(x*y))*(y*x) = x*(x*(y*(y*x)))$.

在上式中用 $x*y$ 替换 x,用 x 替换 y 得

$$\text{(1) 的左端} = \{(x*y)*[(x*y)*x]\}*[x*(x*y)]$$
$$= \{[(x*(x*(x*y)))]*y\}*(0*y)$$
$$= [(x*y)*y]*(0*y)$$

$$\text{(1) 的右端} = (x*y)*\{(x*y)*[x*(x*(x*y))]\}$$
$$= (x*y)*[(x*y)*(x*y)]$$
$$= (x*y)*0$$
$$= x*y.$$

所以 $x*y = ((x*y)*y)*(0*y)$. 由定理 2.7.5,X 是一个弱正定关联 BCI-代数.

相反地,假设 X 是一个弱正定关联 BCI-代数. 为了证明 X 是正定关联的,由定义 2.6.1 和节 2.6 的不等式(1),仅需证明

$$x*(x*(y*(y*x))) \leqslant (x*(x*y))*(y*x).$$

由定理 2.7.6,上述不等式等价于

$$(2)\quad x*(x*(y*(y*x)))\leqslant((y*(y*x))*(y*x))*(x*y).$$

首先注意,

$$\begin{aligned}&0*(x*(y*(y*x)))\\&=(0*x)*((0*y)*((0*y)*(0*x)))\\&=(0*x)*((0*x)*((0*y)*(0*y)))\\&=(0*x)*(0*x)\\&=0.\end{aligned}$$

结合定理 2.7.5,我们有

$$\begin{aligned}&x*(x*(y*(y*x)))\\&=(x*(x*(y*(y*x))))*(x*(y*(y*x))).\end{aligned}$$

现在证明(2). 为了简便,记 $s=x*y$, $t=y*x$. 利用定理 2.7.5 和 $0*[x*(y*t)]=0$,我们有

$$\begin{aligned}&x*[x*(y*t)]\\&=\{x*[x*(y*t)]\}*[x*(y*t)]\\&\leqslant(y*t)*[x*(y*t)],\end{aligned}$$

上式两端同右 $*$ 乘$[(y*t)*t]*s$ 得

$$\begin{aligned}&\{x*[x*(y*t)]\}*\{[(y*t)*t]*s\}\\&\leqslant\{(y*t)*[x*(y*t)]\}*\{[(y*t)*t]*s\}\\&=\{(y*t)*[((y*t)*t)*s]\}*[x*(y*t)].\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&(y*t)*\{[(y*t)*t]*s\}\\&=\{[(y*t)*t]*(0*t)\}*\{[(y*t)*t]*s\}\\&\leqslant s*(0*t),\end{aligned}$$

代入上式,我们有

$$\begin{aligned}&\{x*[x*(y*t)]\}*\{[(y*t)*t]*s\}\\&\leqslant[s*(0*t)]*[x*(y*t)]\end{aligned}$$

$$= \{s * [x * (y * t)]\} * (0 * t)$$
$$= \{(x * y) * [x * (y * t)]\} * (0 * t)$$
$$\leqslant [(y * t) * y] * (0 * t)$$
$$= (0 * t) * (0 * t)$$
$$= 0.$$

于是

$$x * [x * (y * t)] \leqslant [(y * t) * t] * s.$$

所以(2) 成立. 这就证明了 X 是正定关联的. □

总结上述结果得:

推论 2.7.9 设 X 是一个 BCI- 代数,则下列条件彼此等价:

(i) X 是正定关联的;

(ii) $x * y = ((x * y) * y) * (0 * y)$;

(iii) $(x * y) * z = ((x * z) * z) * (y * z)$.

推论 2.7.10 正定关联 BCI- 代数是(0,1;1,1) 型拟可换的(拟可换的概念将在节 2.9 介绍).

定理 2.7.11 一个(2,0) 型代数$\langle X; * ,0\rangle$ 是一个正定关联 BCI- 代数当且仅当它满足:$\forall\ x,y,z \in X$,

(i) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

(ii) $x * 0 = x$;

(iii) $x * y = ((x * y) * y) * (0 * y)$;

(iv) $(x * (x * y)) * (y * x)$
$= ((y * (y * x)) * (y * x)) * (x * y)$.

证明 平凡的. □

这个定理表明正定关联 BCI- 代数类构成一个代数簇. 结果 2.7.7 ～ 2.7.11 是 Y. S. Huang[1] 为了回答 J. Meng 和 X. L. Xin[5] 提出的下述问题而给出的：正定关联 BCI- 代数类构成一个代数簇吗？

定义 2.7.2　一个 BCI- 代数 X 是弱关联的当且仅当它满足

$$(x*(y*x))*(0*(y*x))=x.$$

定理 2.7.12　关联 BCK- 代数，p- 半单 BCI- 代数，结合 BCI- 代数均是弱关联 BCI- 代数. □

定理 2.7.13　若 X 是一个弱关联 BCI- 代数，则 $B(X)$ 是一个关联 BCK- 代数.

以上两个定理的证明是容易的，故略. □

下面讨论弱关联 BCI- 代数和弱正定关联 BCI- 代数的关系.

定理 2.7.14　弱关联 BCI- 代数必是弱正定关联的，也是正定关联的.

证明　设 X 是弱关联 BCI- 代数. 一方面

$$\begin{aligned}&(((x*y)*y)*(0*y))*(x*y)\\=&(((x*y)*(x*y))*y)*(0*y)\\=&(0*y)*(0*y)\\=&0.\end{aligned}$$

这就得到

(1) $\{[(x*y)*y]*(0*y)\}*(x*y)=0.$

注意到

$$\begin{aligned}&0*[x*(x*y)]\\=&(0*x)*[(0*x)*(0*y)]\\=&0*y\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(x*y)*[x*(x*y)]\\=&\{x*[x*(x*y)]\}*y\\=&(x*y)*y,\end{aligned}$$

因此在定义 2.7.2 中用 $x*y$ 替换 x,用 x 替换 y,我们有

$$(x*y)*\{[(x*y)*y]*(0*y)\}=0.$$

结合(1)得

$$x*y=[(x*y)*y]*(0*y).$$

这表明 X 是弱正定关联的. □

下例表明定理 2.7.6 的逆不成立.

例 2.7.1 设 $X=\{0,1,2\}$, $*$ 表如

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则 X 是一个弱正定关联 BCI- 代数,但不是弱关联的,因为

$$\begin{aligned}(1*(2*1))*(0*(2*1))&=(1*2)*(0*2)\\&=2*2=0\neq 1.\end{aligned}$$

定理 2.7.15 设 X 是一个弱关联 BCI- 代数,则 $\forall\ x,y\in X$,

$$x*(x*y)\leqslant(y*(y*x))*(0*(y*x)).$$

证明　因 X 是弱关联的，所以

$$(x*(y*x))*(0*(y*x))=x.$$

于是

$$\begin{aligned}
&x*(x*y)\\
&=((x*(y*x))*(0*(y*x)))*(x*y)\\
&=((x*(y*x))*(x*y))*(0*(y*x))\\
&=((x*(x*y))*(y*x))*(0*(y*x))\\
&\leqslant (y*(y*x))*(0*(y*x)),
\end{aligned}$$

这儿利用了不等式

$$(x*(x*y))*(y*x)\leqslant y*(y*x).$$

□

弱关联性和关联性有何关系呢？

定理 2.7.16　弱关联 BCI- 代数必是关联的.

证明　假设 X 是弱关联的. 记

$$s=(0*(y*x))*(x*y),$$

定理 1.1.9 告诉我们 $s=0$. 由定义和定理 2.7.13

$$\begin{aligned}
&x*(x*y)\\
&=((x*(y*x))*(0*(y*x)))*(x*y)\\
&=(((x*(y*x))*(x*y))*(x*y))*s\\
&=((x*(y*x))*(x*y))*(x*y)\\
&\leqslant (y*(y*x))*(x*y),
\end{aligned}$$

所以

$$x*(x*y)\leqslant (y*(y*x))*(x*y).$$

相反的不等式是显然的. 于是

$$x*(x*y)=(y*(y*x))*(x*y),$$

这表明 X 是关联的. □

应当注意,定理 2.7.15 的逆不成立. 例如 $X=\{0,1,2\}$, $*$ 表如下:

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个关联 BCI- 代数(见定理 2.5.2). 但是

$$\begin{aligned}&(1*(2*1))*(0*(2*1))\\=&(1*2)*(0*2)\\=&2*2=0\neq 1,\end{aligned}$$

所以 X 不是弱关联的.

关于弱关联与关联的本质区别,见节 4.2.

魏仕民[1] 引入了拟关联 BCI- 代数. Y. S. Huang[1] 证明了这个概念等价于关联性.

定义 2.7.3 一个 BCI- 代数 X 叫做拟关联的,如果它满足

(i) $((x*(x*y))*(x*y))*(0*(x*y))$
$$=y*(y*(x*(x*y))).$$

定理 2.7.17 一个 BCI- 代数 X 是拟关联的当且仅当 X 是关联的.

证明 设 X 是拟关联的. 如果 $x\leqslant y$,由(5) 得

$$x=y*(y*x).$$

所以 X 是可换的. 在定义 2.7.3(i) 中以 $x*y$ 替换 y,并利用

$$0 * (x * (x * y)) = 0 * y,$$

我们有

$$\begin{aligned} & \{x * [x * (x * y)]\} * [x * (x * y)] \\ = & (x * y) * [x * (x * y)] \\ = & \{x * [x * (x * y)] * y \\ = & [(x * y) * y] * (0 * y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (x * y) * \{(x * y) * [x * (x * (x * y))]\} \\ = & (x * y) * [(x * y) * (x * y)] \\ = & x * y, \end{aligned}$$

我们有

$$x * y = ((x * y) * y) * (0 * y).$$

由推论 2.7.9,X 是正定关联的. 这就证明了,X 既是可换的又是正定关联的,所以 X 是关联的.

相反地,设 X 是关联的,则 X 是可换的和正定关联的. 由可换性知,X 满足

(1)　$x * (x * y) = y * (y * (x * (x * y))).$

由正定关联性知,X 满足

$$x * y = ((x * y) * y) * (0 * y),$$

以 $x * y$ 替换 y 得

(2)　$x * (x * y)$

$$= ((x * (x * y)) * (x * y)) * (0 * (x * y)).$$

结合(1) 和(2),我们有

$$\begin{aligned} & ((x * (x * y)) * (x * y)) * (0 * (x * y)) \\ = & y * (y * (x * (x * y))). \end{aligned}$$

所以 X 是拟可换的. □

受到定理 2.7.5 的启发,M. A. Chaudhry[1] 引入了弱可换 BCI- 代数的概念.

定义 2.7.4 一个 BCI- 代数 X 叫做弱可换的,如果它满足:

(i) $(x*(x*y))*(0*(x*y)) = y*(y*x)$.

关于弱可换性和弱关联性之间的关系,M. A. Chaudhry[1]给出:设 X 是一个拟结合 BCI- 代数,则弱关联性蕴涵弱可换性(M. A. Chaudhry[1;Theorem 7]). 魏仕民和孟杰[1] 改进了这一结果,取消了"拟结合"这个条件.

定理 2.7.18 弱关联 BCI- 代数必是弱可换的.

证明 设 X 是一个弱关联 BCI- 代数. 对任意 $x,y \in X$,由推论 1.3.5 和定理 1.3.6 有

$$0*(x*y) = 0*(a_x*a_y),$$
$$0*(y*x) = 0*(a_y*a_x).$$

注意到

$$\begin{aligned}&\{(y*(y*x))*[0*(y*x)]\}*[y*(y*x)]\\ =\ &0*[0*(y*x)]\\ =\ &0*[0*(a_y*a_x)]\\ =\ &0*(a_x*a_y)\\ =\ &0*(x*y),\end{aligned}$$

这儿利用了定理 1.3.1(viii) 和(x),所以我们有

$$\begin{aligned}&[(y*(y*x))*(0*(y*x))]*(0*(x*y))\\ \leqslant\ &y*(y*x).\end{aligned}$$

于是由定理 2.7.14 得

$$\begin{aligned}&(x*(x*y))*(0*(x*y))\\ \leqslant\ &[(y*(y*x))*(0*(y*x))]*(0*(x*y))\\ \leqslant\ &y*(y*x).\end{aligned}$$

再次应用定理 2.7.7 得

$$y*(y*x) \leqslant (x*(x*y))*(0*(x*y)).$$

因此

$$y*(y*x) = (x*(x*y))*(0*(x*y)),$$

即 X 是弱可换的. □

结合定理 2.7.6 有下述

推论 2.7.19　一个弱关联 BCI- 代数既是正定关联的也是弱可换的.

一个自然的问题是:这个推论的逆成立吗?回答是否定的.事实上例 2.7.1 既是弱可换也是弱正定关联,但不是弱关联的.那么在什么条件下,这个推论的逆成立呢?在节 4.2 将给出解答.弱关联的进一步性质我们在后面还要讨论.

可换 BCI- 代数和弱可换 BCI- 代数有何关系呢?M. A. Chaudhry[2] 给出了回答.

定理 2.7.20　弱可换 BCI- 代数必是可换的.

证明　设 X 是一个弱可换 BCI- 代数,$a \in L(X)$. 对任意 x, $y \in V(a)$,由定理 1.3.6 有

$$x*y \in V(0) = B(X),$$

因此 $0*(x*y)=0$. 于是弱可换性给出

$$\begin{aligned} x*(x*y) &= (x*(x*y))*(0*(x*y)) \\ &= y*(y*x). \end{aligned}$$

定理 2.4.4 告诉我们,X 是可换的. □

注意，该定理的逆不成立.

例 2.7.2 设 $X = \{0,1,2,3,4\}$，$*$ 表如下

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	4	4	2
1	1	0	4	4	2
2	2	2	0	0	4
3	3	2	1	0	4
4	4	4	2	2	0

则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个可换 BCI-代数，但不是弱可换的. 事实上

$$\begin{aligned}&(1*(1*3))*(0*(1*3))\\=&(1*4)*(0*4)\\=&2*2=0\\\neq&3*(3*1)=1.\end{aligned}$$

2.8 具有条件(S)的 BCI-代数

K. Iséki[4] 推广具有条件(S)的 BCK-代数到 BCI-代数. 设 X 是一个 BCI-代数，对任意 $a,b\in X$，记

$$A(a,b)=\{x\in X:x*a\leqslant b\}.$$

因为 $x*a\leqslant b$ 等价于 $x*b\leqslant a$，所以 $A(a,b)=A(b,a)$. 显然 $a*(0*b)$ 和 $b*(0*a)$ 属于 $A(a,b)$. 本节未注明出处的结果，均属于 K. Iséki[4].

定义 2.8.1 设 X 是一个 BCI-代数. 如果对于任意 $a,b\in X$，集 $A(a,b)$ 有最大元，则称 X 是具有条件(S)的，且记 $A(a,b)$ 的最大元为 $a\circ b$.

例 2.8.1 设 $X=\{0,1,2\}$，$*$ 表如下

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则 X 是一个具有条件(S) 的 BCI- 代数，$\circ$ 表如下

0	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	1

(见 K. Iséki[4]).

例 2.8.2 设 $X=\{0,1,2,3\}$，$*$ 表如下

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	2	0	3
3	3	3	0	0

则 X 是一个 BCI- 代数，但不具条件(S)，事实上 $A(1,2)=\{0,1,2,3\}$ 无最大元(见胡庆平[1]).

定理 2.8.1 具有条件(S) 的 BCK- 代数亦是具有条件(S) 的 BCI- 代数.

证明 平凡的. □

定理 2.8.2(Y. L. Liu[1]) 任何 p- 半单 BCI- 代数是具有条

件(S) 的.

证明 设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数,且 $a,b\in X$. 因为

$$((a*(0*b))*a)*b=(0*(0*b))*b=0,$$

所以 $a*(0*b)\in A(a,b)$. 现在设 $u\in A(a,b)$,即 $u*a\leqslant b$,这等价于 $(u*a)*b=0$. 于是由定理 2.2.2(viii) 和 2.2.3(iii) 得

$$\begin{aligned}u*(a*(0*b))&=(0*b)*(a*u)\\&=(0*(a*u))*b\\&=(u*a)*b\\&=0.\end{aligned}$$

这就说明了,$a*(0*b)=a\circ b$. 所以 X 是具有条件的. □

推论 2.8.3 结合 BCI- 代数是具有条件(S) 的. □

定理 2.8.4 设 X 是具有条件(S) 的 BCI- 代数,则对任意 x, $y,z\in X$,

(i) $x\circ y=y\circ x$,

(ii) $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$,

(iii) $x\circ 0=x$,

即 $\langle X;\circ,0\rangle$ 是一个可换幺半群.

证明 仅需证明(ii). 由定义知

$$((x\circ y)\circ z)*z\leqslant x\circ y,$$

因此

$$\begin{aligned}(((x\circ y)\circ z)*y)*z&=(((x\circ y)\circ z)*z)*y\\&\leqslant (x\circ y)*y\leqslant x.\end{aligned}$$

于是

$$((x\circ y)\circ z)*y\leqslant x\circ z,$$

$$(x \circ y) \circ z \leqslant (x \circ z) \circ y.$$

交换 y 和 z 便得相反的不等式,所以

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

结合(1) 我们有

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (y \circ x) \circ z \\ &= (y \circ z) \circ x \\ &= x \circ (y \circ z).\end{aligned}$$

(ii) 成立. □

定理 2.8.5　设 X 是具有条件(S) 的 BCI- 代数,则对任意 $x, y, z \in X$, $x \leqslant y$ 蕴涵 $x \circ y \leqslant y \circ z$.

证明　假设 $x \leqslant y$,则我们有

$$(x \circ z) * y \leqslant (x \circ z) * x \leqslant z.$$

所以 $x \circ z \leqslant y \circ z$. □

上述两个定理表明,具有条件(S) 的 BCI- 代数关于运算 $\circ$ 是一个偏序可换幺半群.

定理 2.8.6　设 X 是一个具条件(S) 的 BCI- 代数,则对任意 $x, y, z \in X$,

(i)　$(x * y) * z = x * (y \circ z)$,

(ii)　$(x \circ z) * (y \circ z) \leqslant x * y \leqslant (x * z) \circ (z * y)$.

证明　因为

$$\begin{aligned}(x * ((x * y) * z)) * z &= (x * z) * ((x * y) * z) \\ &\leqslant y,\end{aligned}$$

我们有

$$x*((x*y)*z)\leqslant y\circ z,$$

于是

$$x*(y\circ z)\leqslant (x*y)*z.$$

另一方面,因为

$$(x*y)*(x*(y\circ z))\leqslant (y\circ z)*y\leqslant z,$$

我们有

$$(x*y)*z\leqslant x*(y\circ z).$$

所以$(x*y)*z=x*(y\circ z)$. (i) 成立.

因为$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y$,所以$x*y\leqslant (x*z)\circ(z*y)$. 注意到$x*(x*y)\leqslant y$蕴涵$x\leqslant (x*y)\circ y$,由定理2.8.5得$x\leqslant (x*y)\circ y$. 于是

$$x\circ z\leqslant ((x*y)\circ y)\circ z=(x*y)\circ(y\circ z),$$

这等价于

$$(x\circ z)*(y\circ z)\leqslant x*y.$$

(ii) 成立. □

胡庆平[1]给出了下述定理.

定理 2.8.7 设X是一个BCI-代数. 如果存在一个二元运算$\circ$使得对任意$x,y,z\in X$,

(i) $(x*y)*z=x*(y\circ z)$,

则X是具有条件(S)的,$\circ$是S-运算.

证明 由(i)得

$$((x\circ y)*x)*y=(x\circ y)*(x\circ y)=0,$$

于是$(x\circ y)*x\leqslant y$. 另一方面,如果$z*x\leqslant y$,则

$$z*(x\circ y)=(z*x)*y=0.$$

所以$z\leqslant x\circ y$. 这表明$x\circ y$是$\{z\in X: z*x\leqslant y\}$的最大元,即$X$

是具有条件(S) 的. □

由定理 2.8.6(i) 和定理 2.8.7 得

定理 2.8.8　BCI-代数 X 是具有条件(S) 的当且仅当存在一个二元运算 $\circ$ 使得对任意 $x,y,z \in X$,

$$(x * y) * z = x * (y \circ z).$$

这是 H. Yutani[1] 对 BCK-代数所证结果的推广.

综合 BCI-代数的定义和定理 2.8.8,我们得

定理 2.8.9　一个(2,2,0)型代数 $\langle X; *, \circ, 0\rangle$ 是一个具条件(S) 的 BCI-代数当且仅当它满足:

(i)　$(x * y) * (x * z) \leqslant z * y$;

(ii)　$x * (x * y) \leqslant y$;

(iii)　$x \leqslant x$;

(iv)　$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 蕴涵 $x = y$;

(v)　$x \leqslant y$ 当且仅当 $x * y = 0$;

(vi)　$(x * y) * z = x * (y \circ z)$. □

为了进一步讨论具有条件(S) 的 BCI-代数与剩余偏序可换幺半群的关系,下面回顾某些有关的结论.

定义 2.8.2(L. Fuchs[1])　一个代数 $\langle X; \cdot, 1\rangle$,这儿 $\cdot$ 是 X 上的一个二元运算,1 是 X 的一个常元,叫做**可换幺半群**,如果它满足

G_1　$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

G_2　$x \cdot y = y \cdot x$,

G_3 $x \cdot 1 = x$.

如果$\langle X; \leqslant \rangle$还是一个偏序集,且满足

G_4 $x \leqslant y$ 蕴涵 $x \cdot z \leqslant y \cdot z$,

则$\langle X; \leqslant, \cdot, 1 \rangle$叫做偏序可换幺半群. 如果对$a, b \in X$,集合$\{x \in X : x \cdot a \leqslant b\}$关于$\leqslant$有最大元,该最大元称为$b$关于$a$的剩余,记为$b : a$. 如果对任意$a \in X$,$b : a$均存在,则称$a$为一个剩余元. 若$a$是一个剩余元,则可以证明$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$. 如果$X$的每个元素是剩余元,则$\langle X; \leqslant, :\ \cdot, 1 \rangle$叫做剩余偏序可换幺半群.

定理 2.8.10(L. Fuchs[1]) 假设$\langle X; \leqslant, :, \cdot, 1 \rangle$是一个剩余偏序可换幺半群,并且1是一个极大元,则下述性质成立:

(i) $(y : x) \cdot x \leqslant y$;

(ii) $x : x = 1$, $x = x : 1$;

(iii) $x \leqslant y$ 当且仅当 $y : x = 1$;

(iv) $x \leqslant (x \cdot y) : y$;

(v) $x \leqslant y$ 蕴涵 $x : z \leqslant y : z$ 和 $z : y \leqslant z : x$;

(vi) $y : x \leqslant (y \cdot z) : (x \cdot z)$.

证明 (i) 是明显的.

因为$1 \cdot x = x \leqslant x$,所以$1 \leqslant x : x$. 但1是极大元,因此$x : x = 1$. 由(i),我们有$(x : 1) \cdot 1 \leqslant x$, 所以$x : 1 \leqslant x$. 另一方面,由$x \cdot 1 \leqslant x$得$x \leqslant x : 1$. 这表明$x = x : 1$. (ii) 得证.

如果$x \leqslant y$,则$1 \cdot x \leqslant y$. 因此$1 \leqslant y : x$. 结合1是一个极大元,就有$y : x = 1$. 相反地,如果$y : x = 1$,则$x = 1 \cdot x \leqslant y$. (iii) 成立.

因为$x \cdot y \leqslant x \cdot y$,所以,$x \leqslant (x \cdot y) : y$. (iv) 成立.

如果$x \leqslant y$,由(i) 得

$$(x : z) \cdot z \leqslant x \leqslant y,$$

因此 $x:z\leqslant y:z$. 再次利用(i)，我们有

$$(z:y)\cdot x\leqslant(z:y)\cdot y\leqslant z,$$

所以 $z:y\leqslant z:x$. (v) 成立.

由(i) 得

$$(y:x)\cdot(x\cdot z)=[(y:x)\cdot x]\cdot z\leqslant y\cdot z,$$

所以 $y:x\leqslant(y\cdot z):(x\cdot z)$. (vi) 成立. □

定理 2.8.11(L. Fuchs[1])　假设 $\langle X;\leqslant,:,\cdot,1\rangle$ 是一个剩余偏序可换幺半群，1 是一个极大元，则对任意 $x,y,z\in X$，我们有

$$(x:y):z=x:(y\cdot z).$$

证明　由定理 2.8.10(i)，

$$((x:(y\cdot z))\cdot z)\cdot y=(x:(y\cdot z))\cdot(y\cdot z)\leqslant x,$$

所以我们有

$$(x:(y\cdot z))\cdot z\leqslant x:y,$$

$$x:(y\cdot z)\leqslant(x:y):z.$$

另一方面

$$((x:y):z)\cdot z\leqslant x:y,$$

$$\begin{aligned}((x:y):z)\cdot(y\cdot z)&=(((x:y):z)\cdot z)\cdot y\\&\leqslant(x:y)\cdot y\\&\leqslant x,\end{aligned}$$

所以

$$(x:y):z\leqslant x:(y\cdot z).$$

结合上述结论得

$$(x:y):z=x:(y\cdot z).$$ □

定理 2.8.12(L. Fuchs[1])　假设 $\langle X;\leqslant,:,\cdot,1\rangle$ 是一个剩余偏序可换幺半群，1 是一个极大元，则对任意 $x,y,z\in X$ 有：

(i) $(x : y) : z = (x : z) : y$;

(ii) $1 : (x : y) = (1 : x) : (1 : y)$;

(iii) $y \leqslant x : (x : y)$;

(iv) $z : y \leqslant (x : y) : (x : z)$.

证明 由定理 2.8.11,我们有

$(x : y) : z = x : (y \cdot z) = x : (z \cdot y) = (x : z) : y$,

(i) 成立.

由(i) 和定理 2.8.10(ii) 得:

$$\begin{aligned}&(1 : x) : (1 : y)\\&= (((x : y) : (x : y)) : x) : (1 : y)\\&= (((x : y) : x) : (x : y)) : (1 : y)\\&= (((x : x) : y) : (1 : y)) : (x : y)\\&= ((1 : y) : (1 : y)) : (x : y)\\&= 1 : (x : y),\end{aligned}$$

(ii) 成立.

因为

$$y \cdot (x : y) = (x : y) \cdot y \leqslant x,$$

所以 $y \leqslant x : (x : y)$,(iii) 成立.

因为 $z \leqslant x : (x : z)$,由(i) 和定理 2.8.10(v) 得

$$z : y \leqslant (x : (x : z)) : y = (x : y) : (x : z),$$

(iv) 成立. □

现在给出剩余偏序可换幺半群一个等价公理系统.

定理 2.8.13(J. Meng[9]) 假设$\langle X; \leqslant, :, \cdot, 1\rangle$是一个代数,这儿$\leqslant$是$X$上的一个二元关系,$:$ 和 $\cdot$ 是X的二元运算,1是X的一个常元,则$\langle X; \leqslant, :, \cdot, 1\rangle$是一个剩余偏序可换幺半群,

且 1 是一个极大元当且仅当对任意 $x,y,z \in X$,它满足:

(i)　$z : y \leqslant (x : y) : (x : z)$;

(ii)　$y \leqslant x : (x : y)$;

(iii)　$x \leqslant x$;

(iv)　$x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 蕴涵 $x = y$;

(v)　$x \leqslant y$ 当且仅当 $y : x = 1$;

(vi)　$(x : y) : z = x : (y \cdot z)$.

证明　"仅当"部分由定理 2.8.10 ~ 12 已证.现仅证明"当"部分.假设$\langle X; \leqslant, :, \cdot, 1\rangle$ 满足(i) ~ (vi).我们的证明分 5 个结论来进行.

结论 1　$1 \leqslant x$ 蕴涵 $x = 1$.

事实上,$1 \leqslant x$ 等价于 $x : 1 = 1$.于是

$$1 : x = (x : 1) : x = (x : (x : x)) : x = 1.$$

由(iv) 得 $x = 1$.

结论 2　$\langle X; \leqslant\rangle$ 是一个偏序集.

假设 $y \leqslant z$.由(v),$z : y = 1$.利用(i) 我们有

$$1 = z : y \leqslant (x : y) : (x : z).$$

结论 1 告诉我们 $1 = (x : y) : (x : z)$,因此

(1)　$y \leqslant z$ 蕴涵 $x : z \leqslant x : y$.

如果 $z \leqslant x$,则 $x : z = 1$.由(1) 得

$$1 = x : z \leqslant x : y.$$

由结论 1 我们有 $x : y = 1$,即 $y \leqslant x$.这就证明了:$y \leqslant z$ 和 $z \leqslant x$ 蕴涵 $y \leqslant x$.结合(iii) 和(iv),我们已经证明了,$\langle X; \leqslant\rangle$ 是一个偏序集.

结论 4　$(x : y) : z = (x : z) : y$.

因为 $z \leqslant x : (x : z)$,由(i) 和(1) 我们有

$$(x : z) : y \leqslant (x : y) : (x : (x : z)) \leqslant (x : y) : z.$$

由于 $x,y,z \in X$ 是任意的，因此也有 $(x:y):z \leqslant (x:z):y$. 由 (iv) 得 $(x:y):z=(x:z):y$.

结论 5 $\langle X;\cdot,1\rangle$ 是一个偏序可换幺半群.

注意到

$$
\begin{aligned}
&(x\cdot y):(y\cdot x)\\
&=((x\cdot y):y):x && [由(vi)]\\
&=((x\cdot y):x):y && [由结论 4]\\
&=(x\cdot y):(x\cdot y) && [由(vi)]\\
&=1. && [由(iii)]
\end{aligned}
$$

因为 x 和 y 是任意的，所以我们得到

(2) $x\cdot y=y\cdot x$.

因为对任意 $x,y,z \in X$

$$
\begin{aligned}
&((x\cdot y)\cdot z):(x\cdot(y\cdot z))\\
&=(((x\cdot y)\cdot z):x):(y\cdot z) && [由(vi)]\\
&=((((x\cdot y)\cdot z):x):y):z && [由(vi)]\\
&=((((x\cdot y)\cdot z):z):x):y && [由结论 4]\\
&=(((x\cdot y)\cdot z):z):(x\cdot y) && [由(vi)]\\
&=((x\cdot y)\cdot z):(z\cdot(x\cdot y)) && [由(vi)]\\
&=((x\cdot y)\cdot z):((x\cdot y)\cdot z) && [由(2)]\\
&=1, && [由(iii)]
\end{aligned}
$$

所以有下式

(3) $x\cdot(y\cdot z)\leqslant(x\cdot y)\cdot z$.

利用(2)和(3)得

$$
\begin{aligned}
(x\cdot y)\cdot z &= z\cdot(x\cdot y)=z\cdot(y\cdot x)\\
&\leqslant (z\cdot y)\cdot x=(y\cdot z)\cdot x=x\cdot(y\cdot z),
\end{aligned}
$$

即 $(x\cdot y)\cdot z\leqslant x\cdot(y\cdot z)$. 结合(3)得

(4) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

由(ii)我们有 $1\leqslant x:(x:1)$. 利用结论 1 得 $x:(x:1)=1$,

因此 $x:1\leqslant x$. 另一方面,我们有

$$(x:1):x=(x:x):1=1:1=1,$$

所以 $x\leqslant x:1$. 上述两方面表明

(5)　$x=x:1$.

由(iii)和(vi)我们有

$$x:(x\cdot 1)=(x:x):1=1:1=1,$$

所以下式成立

(6)　$x\cdot 1\leqslant x$.

如果 $x\cdot 1\leqslant y$,则由(vi)和(5)

$$1=y:(x\cdot 1)=(y:x):1=y:x.$$

于是 $x\leqslant y$. 这就证明了,$x\cdot 1\leqslant y$ 蕴涵 $x\leqslant y$. 结合 $x\cdot 1\leqslant x\cdot 1$,我们得 $x\leqslant x\cdot 1$,再利用(6),我们就有

(7)　$x\cdot 1=x$.

以上证明了 $\langle X;\cdot,1\rangle$ 是一个可换幺半群.

结论 6　$x\leqslant y$ 蕴涵 $x\cdot z\leqslant y\cdot z$.

假设 $x\leqslant y$,则 $y:x=1$. 由 $y\cdot z\leqslant y\cdot z$ 知 $y\leqslant(y\cdot z):z$,因此 $x\leqslant(y\cdot z):z$,即 $x\cdot z\leqslant y\cdot z$.

总结上述所证,我们得到 $\langle X;\leqslant,:,\cdot,1\rangle$ 是一个剩余偏序可换幺半群,1 是它的一个极大元. □

为了给出具有条件(S)的 BCI- 代数与可换剩余偏序幺半群的等价性,下面回顾有关范畴论的某性知识.

两个范畴 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 叫做等价的,如果存在涵子 $\mathscr{F}:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 满足:

(1)　对 $\mathscr{B}$ 的每个对象 B,存在 $\mathscr{A}$ 的一个对象 A 使得 $\mathscr{F}(A)$ 同构于 B,

(2)　对任意 $A,B\in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$,由 $\mathscr{F}$ 透导的函数 $\varphi:[A,B]_{\mathscr{A}}\to[\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(B)]_{\mathscr{F}}$ 是 $1-1$ 的和到上的(见 K. Balbes and Ph.

Dwinger[1]).

我们用 ***BCIS*** 记具有条件(S)的 BCI-代数的范畴,用 ***CRPOM*** 记可换剩余偏序幺半群(这儿单位元是一个极大元)的范畴.

定理 2.8.14(J. Meng[9]) 以单位元为一个极大元的剩余偏序可换幺半群是范畴等价于具有条件(S)的 BCI-代数.

证明 定义映射 $\mathscr{F}_1$:***CRPOM***⇒***BCIS*** 为:对每个 $A=\langle X;\leqslant,:,\cdot,1\rangle\in \mathrm{Ob}_{CRPOM}$, $\mathscr{F}_1(A)=B=\langle \overline{X};\ll,*,\circ,0\rangle$ 其中 $\overline{X}\triangleq X$, $0\triangleq 1$,对任意 $x,y\in\overline{X}$, $x*y\triangleq x:y$, $x\circ y=x\cdot y$, $x\ll y$ 当且仅当 $y\leqslant x$. 由定理 2.8.9 和 2.8.13 知, $B\in \mathrm{Ob}_{BCIS}$;对于 ***CRPOM*** 中的任一个态射 $f:A\to B$,我们定义 $\mathscr{F}_1(f):\mathscr{F}_1(A)\to\mathscr{F}_1(B)$ 使得 $\mathscr{F}_1(f)(x)=f(x)\forall\, x\in A$. 因为

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_1(f)(x*y)\\
&=f(x:y)\\
&=f(x):f(y)\\
&=f(x)*f(y)\\
&=\mathscr{F}_1(f)(x)*\mathscr{F}_1(f)(y),\\
&\mathscr{F}_1(f)(x\circ y)\\
&=f(x\cdot y)\\
&=f(x)\cdot f(y)\\
&=f(x)\circ f(y)\\
&=\mathscr{F}_1(f)(x)\circ\mathscr{F}_1(f)(y),\\
&\mathscr{F}_1(f)(0)=f(0)=f(1)=1=0,
\end{aligned}
$$

所以 $\mathscr{F}_1(f)$ 是 ***BCIS*** 的一个态射. 显然 $\mathscr{F}_1$ 是 ***CRPOM*** 到 ***BCIS*** 的一个涵子.

定义映射 $\mathscr{F}_2$:***BCIS***→***CRPOM*** 为:对每个 $A=\langle X;\ll,*,\circ,$

$1\rangle \in \mathrm{Ob}_{BCIS}$，$\mathscr{F}_2(A)=B=\langle\overline{X};\leqslant,:,\cdot,1\rangle$，其中 $\overline{X}=X$，$1=0$，对任意 $x,y\in\overline{X}$，$x:y=x*y$，$x\cdot y=x\circ y$，$x\leqslant y$ 当且仅当 $y\ll x$. 由定理 2.8.9 和 2.8.3 知 $B\in\mathrm{Ob}_{CRPOM}$，如果 $f:A\to B$ 是 ***BCIS*** 的一个态射，定义 $\mathscr{F}_2(f):\mathscr{F}_2(A)\to\mathscr{F}_2(B)$ 为：对任意 $x\in\overline{X}$，$\mathscr{F}_2(f)(x)=f(x)$. 和前段一样，我们知道，$\mathscr{F}_2$ 是一个涵子.

注意到 $\mathscr{F}_1\circ\mathscr{F}_2=1_{BCIS}$ 和 $\mathscr{F}_2\circ\mathscr{F}_1=1_{CRPOM}$，所以 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 是等价涵子. 因此 ***BCIS*** 和 ***CRPOM*** 是等价的. □

本节最后，我们讨论一般 BCI- 代数与可换剩余幺半群的关系. 对 BCI- 代数 X 的任意元素 a，定义映射 $R_a:X\to X$ 为：

$$R_a(x)=x*a,\forall\, x\in X.$$

令 $R_a\circ R_b$ 表示 R_a 与 R_b 的复合. 我们用 $M(X)$ 表示所有有限复合 $R_a\circ\cdots\circ R_b$，$\forall\, a,\cdots,b\in X$，作成的集合在 $M(X)$ 中定义关系 $\ll$ 为：

$$R_u\circ\cdots\circ R_v\ll R_a\circ\cdots\circ R_b\Leftrightarrow(\forall\, x\in X)R_u\circ\cdots\circ R_v(x)\leqslant R_a\circ\cdots\circ R_b(x),$$

这等价于 $\forall\, x\in X$，$R_u\circ\cdots\circ R_v(x)*R_a\circ\cdots\circ R_b(x)=0$.

引理 2.8.15　$\langle M(X);\ll\rangle$ 是一个偏序集.

证明　因为 $\forall\, a,\cdots,b,u,\cdots,v,c,\cdots,d\in X$ 和 $\forall\, x\in X$，由 BCI- 代数的性质，我们有

$$(\cdots(x*a)*\cdots)*b\leqslant(\cdots(x*a)*\cdots)*b,$$

于是. $R_a\circ\cdots\circ R_b\ll R_a\circ\cdots\circ R_b$；如果

$$(\cdots(x*a)*\cdots)*b\leqslant(\cdots(x*u)*\cdots)*v,$$

$$(\cdots(x*u)*\cdots)*v\leqslant(\cdots(x*a)*\cdots)*b,$$

则

$$(\cdots(x*a)*\cdots)*b=(\cdots(x*u)*\cdots)*v,$$

这就是说 $R_a \circ \cdots \circ R_b \ll R_u \circ \cdots \circ R_v$ 和 $R_u \circ \cdots \circ R_u \ll R_a \circ \cdots \circ R_b$ 蕴涵 $R_a \circ \cdots \circ R_b = R_u \circ \cdots \circ R_v$；如果

$$(\cdots(x * a) * \cdots) * b \leqslant (\cdots(x * u) * \cdots) * v,$$

$$(\cdots(x * u) * \cdots) * v \leqslant (\cdots(x * c) * \cdots) * d,$$

则

$$(\cdots(x * a) * \cdots) * b \leqslant (\cdots(x * c) * \cdots) * d,$$

这等价于

$$R_a \circ \cdots \circ R_b \leqslant R_u \circ \cdots \circ R_v \text{ 和 } R_u \circ \cdots \circ R_v \leqslant R_c \circ \cdots \circ R_d$$

蕴涵 $R_a \circ \cdots \circ R_b \leqslant R_c \circ \cdots \circ R_d$. 综上所证，$\langle M(X); \ll\rangle$ 是一个偏序集. □

引理 2.8.16 $\langle M(X); \circ, R_0\rangle$ 是一个可换幺半群.

证明 因为 $\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned}
&(R_a \circ \cdots \circ R_b) \circ (R_u \circ \cdots \circ R_v)(x) \\
&= (\cdots(((\cdots(x * a) * \cdots) * b) * u) * (\cdots) * v \\
&= (\cdots(((\cdots(x * u) * \cdots) * v) * a) * (\cdots) * b \\
&= (R_u \circ \cdots \circ R_v) \circ (R_a \circ \cdots \circ R_b)(x),
\end{aligned}$$

所以 $(R_a \circ \cdots \circ R_b) \circ (R_u \circ \cdots \circ R_v) = (R_u \circ \cdots \circ R_v) \circ (R_a \circ \cdots \circ R_b)$. 这说明 $M(X)$ 关于 $\circ$ 是可换的.

显然运算 $\circ$ 满足结合律.

因为 $\forall\, x \in X$,

$$\begin{aligned}
R_0 \circ R_a \circ \cdots \circ R_b(x) &= R_a \circ \cdots \circ R_b(x * 0) \\
&= R_a \circ \cdots \circ R_b(x), \\
R_a \circ \cdots \circ R_b \circ R_0(x) &= (R_a \circ \cdots \circ R_b(x)) * 0 \\
&= R_a \circ \cdots \circ R_b(x),
\end{aligned}$$

所以 $R_0 \circ (R_a \circ \cdots \circ R_b) = R_a \circ \cdots \circ R_b = (R_a \circ \cdots \circ R_b) \circ R_0$.

以上证明了 $\langle M(X); \circ, R_0\rangle$ 是一个可换幺半群，R_0 是其单位

元. □

引理 2.8.17　R_0 是 $\langle M(X); \ll\rangle$ 的一个极大元.

证明　假设 $R_0 \ll R_a \circ \cdots \circ R_b$,则 $\forall\, x \in X$,

$$
\begin{aligned}
x = x * 0 &= R_0(X) \\
&\leqslant R_a \circ \cdots \circ R_b(x) \\
&= (\cdots(x * a) * \cdots) * b,
\end{aligned}
$$

即

$$x * [(\cdots(x * a) * \cdots) * b] = 0.$$

所以

$$
\begin{aligned}
R_a \circ \cdots \circ R_b(x) &= (\cdots(0 * a) * \cdots) * b \\
&= ((\cdots(((x * (\cdots(x * a) * \cdots)) * b) * a) * \cdots) * b \\
&= [(\cdots(x * a) * \cdots) * b] * [(\cdots(x * a) * \cdots) * b] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

由此得 $\forall\, x \in X$,

$$
\begin{aligned}
R_a \circ \cdots \circ R_b(x) * R_0(X) &= [(\cdots(x * a) * \cdots) * b] * (x * 0) \\
&= (\cdots(0 * a) * \cdots) * b \\
&= R_a \circ \cdots \circ R_b(0) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

于是 $R_a \circ \cdots \circ R_b \ll R_0$. 结合 $R_0 \ll R_a \circ \cdots \circ R_b$,我们有 $R_a \circ \cdots \circ R_b = R_0$. 这表明 R_0 是 $\langle M(X); \ll\rangle$ 的一个极大元. □

引理 2.8.18　对任意 $a, b \in X$, R_a 是 $M(X)$ 的一个剩余元,并且 $R_a : R_b = R_{a*b}$.

证明　因为对任意 $x \in X$,我们有

$$R_b \circ R_{a*b}(x) = (x * b) * (a * b) \leqslant x * a = R_a(x),$$

所以 $R_b \circ R_{a*b} \ll R_a$.

如果 $R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n} \in M(X)$ 满足 $R_b \circ (R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n}) \ll R_a$，则 $\forall\, x \in X$

$$R_b \circ (R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n})(x) \leqslant R_a(x).$$

在上式中取 $x = a$ 得

$$R_b \circ (R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n})(a) \leqslant R_a(a) = a * a = 0,$$

$$R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n}(a * b) = 0.$$

于是 $\forall\, x \in X$

$$\begin{aligned}
&(R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n})(x)) * R_{a*b}(x) \\
&= ((\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n) * (x * (a * b)) \\
&= (\cdots((x * (x * (a * b))) * a_1) * \cdots) * a_n \\
&\leqslant (\cdots((a * b) * a_1) * \cdots) * a_n \\
&= R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n}(a * b) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此 $R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n}(x) \leqslant R_{a*b}(x)$，即 $R_{a_1} \circ \cdots \circ R_{a_n} \leqslant R_{a*b}$. 这就证明了 $R_a : R_b = R_{a*b}$. □

定理 2.8.19(W. P. Huang[4])　每个 BCI- 代数是单位元为极大元的一个偏序可换幺半群的剩余元的一个集.

证明　对于BCI- 代数 X，记 $R = \{R_a : a \in X\}$. 由引理2.8.16 ~ 2.8.18，R 是 $\langle M(X); \ll, \circ, R_0\rangle$ 的剩余元的一个集合，而 $\langle M(X); \ll, \circ, R_0\rangle$ 是一个偏序可换幺半群，其中 R_0 关于 $\ll$ 是一个极大元. 我们定义映射 $f: X \to R$ 使得

$$f(a) = R_a \in R, \forall\, a \in R.$$

因为 $a = b$ 当且仅当 $R_a = R_b$，所以 f 是一对一的. □

1988 年,I. Fleischer 证明了:每个 BCK- 代数是一个整偏序可换幺半群的剩余元的一个集. 定理 2.8.19 是 W. P. Huang 对这一结果在 BCI- 代数中的推广.

2.9　拟可换 BCI- 代数

H. Yutani[2]首先在BCK- 代数中引入了拟可换性概念,1980 年 K. Iséki[5] 将这一概念推广到 BCI- 代数. 胡庆平[1],C. S. Hoo[4],C. S. Hoo and P. V. R. Murty[2] 和 J. Meng and Y. B. Jun[2] 均研究了这一概念.

设 X 是一个 BCI- 代数,且 $m,n,i,j \in N$. 归纳地定义

$$Q_{0,0}(x,y) = x*(x*y),$$

$$Q_{m+1,n}(x,y) = Q_{m,n}(x,y)*(x*y),$$

$$Q_{m,n+1}(x,y) = Q_{m,n}(x,y)*(y*x).$$

定义 2.9.1(K. Iséki[5])　一个 BCI- 代数 X 称为$(m,n;i,j)$型拟可换的,如果 $Q_{m,n}(x,y) = Q_{i,j}(y,x)$.

例 1.1.6 就是一个(1,0;0,0) 型的拟可换 BCI- 代数,这是 K. Iséki 的重要例子.

定理 2.9.1(孟杰,辛小龙[4],[5])　关联 BCI- 代数是(0,1;0,0) 型拟可换的. 正定关联 BCI- 代数是(0,1;1,1) 型拟可换的.

证明　平凡的. □

定理 2.9.2　拟可换 BCI- 代数的 BCK- 部分是同型拟可换

BCK-代数;拟可换 BCK-代数是同型拟可换 BCI-代数.

证明 平凡的. □

C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1] 给出了下述两个重要定理.

定理 2.9.3 任一个 p-半单 BCI-代数是$(n+j,n;m,m+j+1)$型拟可换的,其中 $m,n,j \in \boldsymbol{N}$.

证明由下述几个引理组成.

引理 2.9.4 $Q_{n,n}(x,y) = y, \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

证明 显然

$$Q_{0,0}(x,y) = x*(x*y) = y.$$

假设 $Q_{n,n}(x,y) = y$,则

$$\begin{aligned}Q_{n+1,n+1}(x,y) &= Q_{n,n+1}(x,y)*(x*y)\\&= [Q_{n,n}(x,y)*(y*x)]*(x*y)\\&= (y*(y*x))*(x*y)\\&= x*(x*y)\\&= y.\end{aligned}$$

由归纳法知引理成立. □

引理 2.9.5 $Q_{n+1,n}(x,y) = y*(x*y), \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

证明 由引理 2.9.4 直接可得. □

引理 2.9.6 $Q_{n,n+1}(x,y) = x, \forall\, n \in \boldsymbol{N}$.

证明　由直接计算知

$$\begin{aligned}Q_{0,1}(x,y) &= Q_{0,0}(x,y) * (y * x)\\ &= (x * (x * y)) * (y * x)\\ &= y * (y * x)\\ &= x.\end{aligned}$$

设 $Q_{n,n+1}(x,y) = x$,则

$$\begin{aligned}Q_{n+1,n+2}(x,y) &= Q_{n+1,n+1}(x,y) * (y * x)\\ &= (Q_{n,n+1}(x,y) * (x * y)) * (y * x)\\ &= (x * (x * y)) * (y * x)\\ &= y * (y * x)\\ &= x.\end{aligned}$$

由归纳法,引理得证.　□

引理 2.9.7　假设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数,则

$$\begin{aligned}Q_{n+j,n}(x,y) &= Q_{n,n+j+1}(y,x)\\ &= y *^{j}(x * y), \forall n \in \boldsymbol{N}.\end{aligned}$$

证明　由引理 2.9.4,$Q_{n,n}(x,y) = y$,因此

$$Q_{n+j,n}(x,y) = y *^{j}(x * y).$$

现在仅需证明

$$Q_{n+j,n}(x,y) = Q_{n,n+j+1}(y,x).$$

当 $j = 0$ 时,

$$Q_{n+0,n}(x,y) = y,\ Q_{n,n+1}(y,x) = y,$$

于是

$$Q_{n+0,n}(x,y) = Q_{n,n+0+1}(y,x).$$

假设 $Q_{n+j,n}(x,y) = Q_{n,n+j+1}(y,x)$,则

$$Q_{n+j+1,n}(x,y) = Q_{n+j,n}(x,y) * (x * y)$$

$$= Q_{n,n+j+1}(y,x) * (x * y)$$
$$= Q_{n,n+j+2}(y,x).$$

由归纳法,对任意 $j \in N$ 有

$$Q_{n+j,n}(x,y) = Q_{n,n+j+1}(y,x).$$

引理得证. □

定理 2.9.8 对任意 $n,m,k,j \in N$,如果 $k \neq j+1$,则 p- 半单 BCI- 代数不必是$(n+j,n;m,m+k)$型拟可换的.

该定理由 T. D. Lei and C. C. Xi[1] 的例子说明. 设$\langle \mathbf{Z}; -, 0\rangle$是一个 BCI- 代数,其中 $-$ 是通常的减法,则这个代数是 p- 半单的. 因为

$$Q_{n+j,n}(x,y) = y -^{j}(x-y) = (j+1)y - jx,$$
$$Q_{m,m+k}(y,x) = y -^{k-1}(x-y) = ky - (k-1)x,$$

则 $Q_{n+j,n}(x,y) = Q_{m,m+k}(y,x)$ 蕴涵

$$(j+1)y - jx = ky - (k-1)x,$$
$$(j+1-k)x = (j+1-k)y.$$

如果 $k \neq j+1$,由上述等式得 $x = y$,即当 $x \neq y$ 时,

$$Q_{n+j,n}(x,y) \neq Q_{m,m+k}(y,x).$$

所以对 $k \neq j+1$,这个代数不是$(n+j,n;m,m+k)$型拟可换的. □

当 $n = m = k$ 和 $j = 1$ 时,我们有

推论 2.9.9(T. D. Lei and C. C. Xi[1]) p- 半单 BCI- 代数不必是(1,0;0,0) 型拟可换的. 但是 p- 半单 BCI- 代数是(0,1;0,0)型和(0,2;1,0) 型拟可换的. □

K. Iséki[5] 还得到下述有趣结果.

定理 2.9.10　设 X 是一个(1,0;0,0)型的拟可换 BCK-代数,$a \notin X$,则它的一点扩张$\langle X \cup \{a\}; *, 0\rangle$ 是(1,0;0,0)型拟可换 BCI-代数.

证明　仅需证明对任意 $x \in X$ 有

$$Q_{1,0}(x,a) = Q_{0,0}(a,x),$$
$$Q_{1,0}(a,x) = Q_{0,0}(x,a),$$

即

$$(x*(x*a))*(x*a) = a*(a*x),$$
$$(a*(a*x))*(a*x) = x*(x*a).$$

注意到 $a \in L(X)(X \cup \{a\})$ 且 $x \in B(X)$,上述两式显然成立. □

定理 2.9.11　结合 BCI-代数 X 是(1,0;0,0)和(0,1;0,0)型拟可换 BCI-代数.

证明　由定理 2.1.1,对任意 $x,y \in X$ 有

$$\begin{aligned}
&(x*(x*y))*(x*y) \\
&= (x*(x*y))*(y*x) \\
&= ((x*y)*y)*(y*x) \\
&= (0*y)*(y*x) \\
&= y*(y*x),
\end{aligned}$$

因此

$$Q_{1,0}(x,y) = Q_{0,1}(x,y) = Q_{0,0}(y,x).$$

这即是说 X 是(1,0;0,0)和(0,1;0,0)型拟可换的. □

现在我们给出拟可换 BCI- 代数的一个公理系统,仅包含两个恒等式.

定理 2.9.12(J. Meng and Y. B. Jun[2]) 一个(2,0) 型的代数$\langle X; *, 0\rangle$ 是$(m,n;k,l)$ 型拟可换 BCI- 代数当且仅当它满足

(i) $u*(((x*y)*(x*z))*(z*y))=u$,

(ii) $(x*^{1+n}(x*y))*^{m}(y*x)$

$$=((y*^{1+k}(y*x))*^{l}(x*y))*0.$$

证明 由归纳法容易证明

(1) $0*^{1+n}(0*0)=0$,

(2) $(0*^{1+n}(0*0))*^{m}(0*0)=0$.

定理的必要性是平凡的. 下面仅给出充分性的证明.

为方便记

$$\theta=((0*0)*(0*0))*(0*0).$$

在(i) 中令 $x=y=z=0$ 和 $u=\theta$ 得

(3) $\theta*\theta=\theta$.

在(i) 中取 $x=y=z=\theta$,并利用(1) 得

$$\begin{aligned}u&=u*(((\theta*\theta)*(\theta*\theta))*(\theta*\theta))\\&=u*((\theta*\theta)*\theta)\\&=u*(\theta*\theta)\\&=u*\theta,\end{aligned}$$

即

(4) $u=u*\theta$.

分别取 $u=0$ 和 $u=0*0$,由(4) 得

(5) $0=0*\theta$,

(6) $0*0=(0*0)*\theta$.

在(i) 中取 $y=z=\theta$,并利用(5) 和(6) 得

$$u = u * (((0 * \theta) * (0 * \theta)) * (\theta * \theta))$$
$$= u * ((0 * 0) * \theta)$$
$$= u * (0 * 0),$$

因此

(7)　$u = u * (0 * 0)$.

当 $u = 0$ 时得

(8)　$0 = 0 * (0 * 0)$.

在(ii)中令 $x = y = 0$ 利用(8)和(2)得 $0 = 0 * 0$. 由(7)得

(9)　$u = u * 0$.

结合(ii)得

(Q)　$Q_{n,m}(x,y) = Q_{k,l}(y,x)$.

在(i)中取 $y = z = 0$ 且利用(9)有

$$u = u * (((x * 0) * (x * 0)) * (0 * 0))$$
$$= u * ((x * x) * 0)$$
$$= u * (x * x),$$

于是

(10)　$u = u * (x * x)$.

令 $u = x * x$, 由(9)得

(11)　$x * x = (x * x) * (x * x)$
$$= (x * x) * ((x * x) * 0).$$

用 $(x * x) * 0$ 右 $*$ 乘上式两边得

$$(x * x) * ((x * x) * 0) = (x * x) *^2 ((x * x) * 0).$$

重复上述作法 n 次有

$$x * x = (x * x) *^{1+n} ((x * x) * 0).$$

类似地，我们有

$$x * x = ((x * x) *^{1+n} ((x * x) * 0)) *^m (0 * (x * x)).$$

结合(Q)得

$$x * x = (0 *^{1+k} (0 * (x * x))) *^l ((x * x) * 0).$$

由(10)有 $0*(x*x)=0$. 利用(11)得$(x*x)*0=x*x$,因此

$$x*x=0*^{l}(x*x)=0.$$

这即 BCI-3.

在(i)中令 $u=((x*y)*(x*z))*(z*y)$, 由 BCI-3 知 BCI-1 成立. 在BCI-1中令$y=0$由(9)得BCI-2. 如果$x*y=y*x=0$,由(9)和(Q)得

$$\begin{aligned}x&=(x*^{1+n}0)*^{m}0\\&=(x*^{1+n}(x*y))*^{m}(y*x)\\&=(y*^{1+k}(y*x))*^{l}(x*y)\\&=(y*^{1+k}0)*^{l}0\\&=y.\end{aligned}$$

BCI-4 成立. 所以$\langle X;*,0\rangle$是$(n,m;k,l)$型拟可换 BCI- 代数. □

最后作两点说明

1. A. Wronski[1] 的著名例子(也可参看 J. Meng and Y. B. Jun[2]PP. 175 — 180)是一个非拟可换的BCK-代数,因此这个代数的一点扩张是一个非拟可换的真 BCI- 代数.

2. H. Yutani[2]证明了每个有限BCK-代数是拟可换的,这一结果亦可推广到 BCI- 代数中来,其证明留给读者.

2.10 积代数

设$\langle X_\alpha;*_\alpha,0_\alpha\rangle(\alpha\in A)$是一族 BCI- 代数. $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$是所有映射$f:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$的集,这儿$\forall\alpha\in A, f(\alpha)\in X_\alpha$. 对于$f,g\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$定义$f*g$为:$\forall\alpha\in A,(f*g)(\alpha)=f(\alpha)*_\alpha g(\alpha)$,定义0为$\forall\alpha\in A,0(\alpha)=0_\alpha$. 可以验证$\langle\prod_{\alpha\in A}X_\alpha;*,0\rangle$是一个BCI-代数,称为$\langle X_\alpha;$

$*_\alpha, 0_\alpha\rangle(\alpha \in A)$的直积，$X_\alpha$称为它的$\alpha$-投影或直积因子.对于有限个 BCI-代数$\langle X_i; *_i, 0_i\rangle(i = 1,\cdots,n)$的直积有时也简写为$X_1 \times \cdots \times X_n$.

下列结果是容易验证的.

1. $B(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} B(X_\alpha), L(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) = \prod_{\alpha\in A} L(X_\alpha)$;

2. $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$是$p$-半单的(结合的，拟结合的，可换的)当且仅当每个$X_\alpha$是$p$-半单的(结合的，拟结合的，可换的).

由已有代数构成新代数，我们已讲述了三种方法，这就是取子代数、商代数和积代数.

第 3 章　理想和同余

在第 1 章第 4 节我们已介绍了理想的概念. 本章将详细讨论 BCI- 代数的理想理论.

3.1　理想格

对于 BCI- 代数 $\langle X;*,0\rangle$, X 和 $\{0\}$ 总是它的理想. 另一方面容易看出任意多个理想的交亦是理想. 因此对于任一子集 $A\subseteq X$, 包含 A 的最小理想就是包含 A 的所有理想的交, 这样的理想称作由 A 生成的理想, 记为 $(A]$. 显然 $(X]=X$, $(\varnothing]=(\{0\}]=\{0\}$, $A\subseteq B$ 蕴涵 $(A]\subseteq(B]$. 如果 A 是一个理想, 则 $(A]=A$. 进一步, 若 A, B 是 X 的理想, 则 $(A\cup B]$ 是包含 A 和 B 的最小理想, $A\cap B$ 是含于 A 和 B 的最大理想. 对于理想 A 和 B, 我们记 $A\wedge B=A\cap B$, $A\vee B=(A\cup B]$. 若 $A_i(i\in D)$, 则 $\bigvee_{i\in D}A_i$ 和 $\bigwedge_{i\in D}A_i$ 分别表示 $(\bigcup_{i\in D}A_i]$ 和 $\bigcap_{i\in D}A_i$. 于是我们有

定理 3.1.1(魏仕民, 赵树濂[1])　设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数, 记 X 的所有理想的集为 $\boldsymbol{I}(X)$, 则 $\langle\boldsymbol{I}(X);\vee,\wedge\rangle$ 是一个完备格, X 是最大元, $\{0\}$ 是最小元.

和 BCK- 代数情形一样, 人们关心如何由一个集生成理想.

定理 3.1.2(胡庆平[1])　设 A 是 BCI- 代数的一个子集,则

$$(A] = \{x \in X: \exists\ a_1,\cdots,a_n \in A \cup \{0\}\ \text{使}\ (\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n = 0\}.$$

证明　为了方便记上式右端为 B. 显然 $0 \in B$.

假设 $x * y \in B, y \in B$. 则存在

$$a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n \in A \cup \{0\}.$$

使得

$$(\cdots(y * a_1) * \cdots) * a_m = 0,$$
$$(\cdots((x * y) * b_1) * \cdots) * b_n = 0.$$

因此

$$((\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_n) * y = 0,$$
$$((\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_n \leqslant y.$$

逐次用 $a_1,\cdots,a_m$ 右 $*$ 乘上述不等式得

$$\begin{aligned}&(\cdots(((\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_n) * a_1) * \cdots) * a_m\\ \leqslant\ &(\cdots(y * a_1) * \cdots) * a_m\\ =\ &0,\end{aligned}$$

所以

$$(\cdots(((\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_n * a_1) * \cdots) * a_m = 0.$$

这表明 $x \in B$. 这就证明了 B 是 X 的一个理想.

显然 $A \subseteq B$.

假设 I 是包含 A 的任一个理想. 为了证明 $B \subseteq I$,任取 $x \in B$. 则存在 $c_1,\cdots,c_n \in A$ 使得

$$(\cdots(x * c_1) * \cdots) * c_n = 0.$$

因为 $0 \in I$,我们有

$$(\cdots(x * c_1) * \cdots) * c_n \in I.$$

由于 I 是 X 的一个理想,并且 $c_1,\cdots,c_n \in I$,我们有 $x \in I$. 所以 $B \subseteq I$. 这就证明了 $B = (A]$.　□

这个定理的证明完全类似于 BCK-代数的情形(例如:参阅 K. Iséki and S. Tanaka[1]). 为了读者方便,这里详细给出.

定理 3.1.3(魏仕民,赵树濂[1]) 设 A_1 和 A_2 是 BCI-代数 X 的理想,则

(i) $A_1 \vee A_2 = \{x \in X: \exists\, a_1, \cdots, a_n \in A_1$ 和 $\exists\, b_1, \cdots, b_m \in A_2$ 使 $(\cdots(((\cdots(x * a_1) * \cdots) * a_n) * b_1) * \cdots) * b_m = 0\}$;

(ii) $A_1 \vee A_2 = \{x \in X: \exists\, a_1 \in A_1$ 和 $a_2 \in A_2$ 使得 $(x * a_1) * a_2 = 0\}$.

证明 因为 $0 \in A_1 \cup A_2$,所以(i) 成立.

对任意 $x \in A_1 \vee A_2$,存在 $b_1, \cdots, b_n \in A_1 \cup A_2$ 使得

$$(\cdots(x * b_1) * b_2) * \cdots) * b_n = 0.$$

分下述三种情形讨论.

(1) 若 $b_1, \cdots, b_n \in A_1$,则 $x \in A_1$. 取 $a_1 = x, a_2 = 0$,则 $(x * a_1) * a_2 = 0$ 且 $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$.

(2) 若 $b_1, \cdots, b_n \in A_2$,证法同上.

(3) 若 $b_1, \cdots, b_i \in A_1, b_{i+1}, \cdots, b_n \in A_2 (1 \leqslant i < n)$,令 $a_2 = (\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_i$,则 $a_2 \in A_2$. 因为

$$(\cdots(a_2 * b_{i+1}) * \cdots) * b_n = 0,$$

并注意到

$$\begin{aligned}
&(\cdots((x * a_2) * b_1) * \cdots) * b_i \\
&= ((\cdots(x * b_1) * \cdots) * b_i) * a_2 \\
&= a_2 * a_2 = 0,
\end{aligned}$$

所以 $x * a_2 \in A_1$. 取 $a_1 = x * a_2$,则

$$(x * a_1) * a_2 = (x * a_2) * a_1 = a_1 * a_1 = 0.$$

综上所述,我们证明了

$$A_1 \vee A_2 \subseteq \{x \in X : \exists\, a_1 \in A_1 \text{ 和 } a_2 \in A_2 \text{ 使 } (x * a_1) * a_2 = 0\}.$$

相反地,因为

$$A_1, A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq (A_1 \cup A_2] = A_1 \vee A_2.$$

因而

$$A_1 \vee A_2 = \{x \in X : \exists\, a_1 \in A_1 \text{ 和 } a_2 \in A_2 \text{ 使 } (x * a_1) * a_2 = 0\}.$$ □

J. Meng[5] 给出下述结果.

定理 3.1.4　设 X 是一个 BCI- 代数, A 是 X 的一个理想, $a \in X$. 则 $A_a = \{x \in X : x *^n a \in A \text{ 对某个 } n \in N\}$ 是包含 A 和 a 的最小理想,即 $A_a = (A \cup \{a\}]$.

证明　设 $x * y \in A_a$ 和 $y \in A_a$. 则存在 $n, m \in N$ 使得

$$(x * y) *^n a \in A \text{ 和 } y *^m a \in A.$$

于是对某个 $u, v \in A$ 有

$$y *^m a = v,\ (x * y) *^n a = u.$$

由后一式得 $(x * u) *^n a \leqslant y$. 用 a 右 $*$ 乘该不等式 m 次得

$$(x * u) *^{n+m} a \leqslant y *^m a \in A,$$

因此 $(x * u) *^{n+m} a \in A$, 即 $(x *^{n+m} a) * u \in A$. 注意 $u \in A$ 和 A 是理想,我们有 $x *^{n+m} a \in A$. 这就是说 $x \in A_a$. 因为 $x *^0 a = x$, 所以 $A \subseteq A_a$. 特别地 $0 \in A_a$. 由 $a * a = 0 \in A$ 知 $a \in A_a$. 这就证明了 A_a 是包含 A 和 a 的一个理想.

设 B 是包含 A 和 a 的任一理想. 若 $x \in A_a$, 则有 $n \in N$ 使 $x *^n a \in A$, 随之 $x *^n a \in B$. 结合 $a \in B$, 由理想定义知 $x \in B$. 这表明 A_a 是包含 A 和 a 的最小理想. □

对于 BCI- 代数 X 的非空子集 A,记

$$L(A) = \{0 * (0 * x); x \in A\}.$$

定理 3.1.5 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想,则

(i) $L(I) = I \cap L(X)$,

(ii) $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个理想.

证明 因为 $a_x = 0 * (0 * x) \leqslant x$,所以 $x \in I$ 蕴涵 $a_x \in I$. 这就是说 $a_x \in I \cap L(X)$,于是 $L(I) \subseteq I \cap L(X)$. 相反的包含关系是显然的. (i) 得证.

为了证明(ii),令 $a * b \in L(I)$ 和 $b \in L(I)$ 这儿 $a, b \in L(X)$. 由(i) 有 $a * b \in I$ 和 $b \in I$. 因为 I 是理想,所以 $a \in I$. 故

$$a \in I \cap L(I) = L(I).$$

显然 $0 \in L(I)$. 这表明 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的理想. (ii) 成立. □

定理 3.1.6 设 X 是一个 BCI- 代数,A 是 $L(X)$ 的一个子集. 记 $I = \bigcup \{V(a); a \in A\}$. 则 I 是 X 的一个理想当且仅当 A 是 $L(X)$ 的一个理想.

证明 设 I 是 X 的一个理想. 因为 $L(I) = A$,由定理 3.1.4,A 是 $L(X)$ 的一个理想.

相反地,设 A 是 $L(X)$ 的一个理想. 显然 $0 \in I$. 如果 $x * y \in I$ 和 $y \in I$,则

$$a_x, a_{x*y}, a_y \in L(X),$$

$$x * y \in V(a_x * a_y),$$

$$a_{x*y} \in V(a_x * a_y).$$

因此 $a_x * a_y = a_{x*y} \in A$. 由 $a_y \in A$ 我们得 $a_x \in A$. 于是 $x \in V(a_x) \subseteq I$. 这表明 I 是 X 的一个理想. □

关于子代数有类似结果.

定理 3.1.7　设 X 是一个 BCI- 代数，A 是 $L(X)$ 的一个子集，记 $I=\bigcup\{V(a):a\in A\}$. 则 I 是 X 的一个子代数当且仅当 A 是 $L(X)$ 的一个子代数.

证明　设 A 是 $L(X)$ 的一个子代数且 $x,y\in I$. 则 $a_x,a_y\in A$ 且 $x\in V(a_x)$，$y\in V(a_y)$. 由定理 1.3.6，$x*y\in V(a_x*a_y)\subseteq I$. 所以 I 是 X 的一个子代数.

相反地，设 I 是 X 的一个子代数，则 $A=I\cap L(X)$. 所以 A 是 $L(X)$ 的一个子代数. □

陈昭木[2] 给出了直积中理想与直积因子中理想的关系.

定理 3.1.8　设 $X_i(i\in A)$ 是一族 BCI- 代数，$X=\prod\limits_{i\in A}X_i$.

(i)　若 I_i 是 $X_i(i\in A)$ 的子代数，则 $I=\prod\limits_{i\in A}I_i$ 是 X 的子代数；反之，对 X 的每个子代数 I，$I_i=\{f(i):f\in I\}$ 是 X_i 的一个子代数，且 $I=\prod\limits_{i\in A}I_i$.

(ii)　$I=\prod\limits_{i\in A}I_i$ 是 X 的理想当且仅当 I_i 是 $X_i(i\in A)$ 的理想.

证明　设 I_i 是 X_i 的子代数 $(i\in A)$，则 $\forall\, i\in A$ 和 $\forall\, f,g\in I$ (即 $f(i),g(i)\in I_i$) 有

$$(f*g)(i)=f(i)*g(i)\in I_i,$$

因此 $f*g\in\prod\limits_{i\in A}I_i=I$. 这表明 I 是 X 的一个子代数.

反之，设 I 是 X 的一个子代数，令 $I_i=\{f(i):f\in I\}(i\in A)$，

容易看出 I_i 是 X_i 的一个非空子集. 如果 $f(i), g(i) \in I_i$，则 $f, g \in I$ 且

$$f(i) * g(i) = (f * g)(i) \in I_i.$$

所以 I_i 是 X_i 的子代数. 由 I_i 的定义知 $I = \prod_{i \in A} I_i$. (i) 得证.

设 I 是 X 的一个理想，则 $\forall\, i \in A$ 我们有

(1) 由 $0 \in I$ 得 $0_i = 0(i) \in I_i$;

(2) 设 $f(i) \in X_i, f(i) * g(i) \in I_i$ 和 $g(i) \in I_i$，则 $f \in X$, $f * g \in I$ 和 $g \in I$. 因此 $f \in I$，故 $f(i) \in I_i$，即 I_i 是 X_i 的理想.

反之，设 I_i 是 X_i 的理想 $(i \in A)$，则

(3) 由于 $0(i) \in I_i$，得 $0 \in I$;

(4) 若 $f \in X, f * g \in I$ 和 $g \in I$，则 $\forall\, i \in I$ 有

$$f(i) * g(i) = (f * g)(i) \in I_i,\ g(i) \in I_i,$$

于是 $f(i) \in I_i$，故 $f \in I$. 即 I 是 X 的一个理想. (ii) 得证. □

3.2 闭理想

闭理想的概念是 C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1] 和 Z. M. Chen and H. X. Wang[2] 独立提出的，实际上，在陈昭木[2] 中闭理想的思想已经诞生，研究闭理想的文献已大量出现，见 C. S. Hoo[4], J. Meng and S. M. Wei[2], J. Meng and H. A. S. Abujabal[1]. 闭理想是 BCI- 代数中重要的概念之一.

定义 3.2.1 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个理想 I 叫做闭的，如果 $x \in I$ 蕴涵 $0 * x \in I$. (C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1], M. Chen and H. X. Wang[2])

在例 1.4.1 中 Z^* 是 Q^* 的一个理想但不是闭的.

借助于闭理想这一术语,节 1.4 中的某些结果可重述于下.

定理 3.2.1　BCI-代数 X 的一个理想 I 是闭的,当且仅当 I 是 X 的一个子代数(定理 1.4.4). □

定理 3.2.2　有限 BCI-代数的每个理想是闭的(定理 1.4.5). □

下面给出进一步的结果.

定理 3.2.3(C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1])　设 X 是一个 BCI-代数,则它的 BCK-部分总是 X 的一个闭理想.

证明　在定理 1.4.3 中已经证明了 $B(X)$ 是 X 的一个理想. 为了证明 $B(X)$ 是闭的,取 $x,y \in B(X)$,即 $x,y \in V(0)$,由定理 1.3.6 知 $x * y \in V(0)$,这表明 $B(X)$ 是 X 的一个子代数. 所以 $B(X)$ 是 X 的一个闭理想. □

定义 3.2.2(C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1])　BCI-代数 X 的理想 I 叫做一个*正理想*,如果 $\forall x \in I$ 恒有 $0 \leqslant x$,等价地说 $I \subseteq B(X)$.

显然每个正理想是闭的,而 $B(X)$ 是最大正理想.

定理 3.2.4(J. Meng and S. M. Wei[2])　BCI-代数 X 的理想 I 是闭的当且仅当 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想.

证明 设 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想. 为了证明 I 是闭的, 取 $x \in I$. 因为 $a_x = 0*(0*x) \leqslant x$, 所以 $a_x \in I$. 随之, $a_x \in I \cap L(X) = L(I)$. 由 $L(I)$ 的闭性, $0*x = 0*a_x \in L(I)$. 利用定理 3.1.4, $0*x \in I$. 即 I 是闭的.

相反地, 设 I 是 X 的一个闭理想. 对任意 $x \in L(I)$. 显然 $0*x \in I$. 结合 $L(I) = I \cap L(X)$ 得 $0*x \in L(I)$. 即 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想. □

这个定理告诉我们, BCI- 代数闭理想的研究能够转化为 p- 半单 BCI- 代数闭理想的研究.

定理 3.2.5(C. S. Hoo and P. V. R. Murty[1]) 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数, $\langle X; +, 0\rangle$ 是它的伴随群, I 是 X 的一个子集. 则下列条件等价:

(i) I 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个闭理想;

(ii) I 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个子代数;

(iii) I 是 $\langle X; +, 0\rangle$ 的一个子群.

证明 由定义, (i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii). 设 I 是 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个子代数, 且 $x, y \in X$. 则 $0*y \in X$. 于是

$$x + y = x*(0*y) \in X,$$

即 I 是 $\langle X; +, 0\rangle$ 的子群.

(iii)⇒(i). 设 I 是 $\langle X; +, 0\rangle$ 的一个子群. 显然 $0 \in I$. 设 $x*y \in I$ 和 $y \in I$. 由定理 2.3.3(iv),

$$\begin{aligned} x &= (x*0)*(y*y) \\ &= (x*y)*(0*y) \\ &= (x*y)+y \in I. \end{aligned}$$

所以 I 是 $\langle X;*,0\rangle$ 的一个理想. 另外, $\forall\, x\in I$ 有 $0*x=x^{-1}\in I$. 所以 I 是 $\langle X;*,0\rangle$ 的一个闭理想. □

综合上述结果，我们有

定理 3.2.6　设 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数, $\langle X;+,0\rangle$ 是它的伴随群. 对于 $L(X)$ 的子集 A, 记 $I=\bigcup\{V(a):a\in A\}$. 则下列条件等价:

(i)　I 是 $\langle X;*,0\rangle$ 的一个子代数;

(ii)　A 是 $\langle L(X);*,0\rangle$ 的一个子代数;

(iii)　A 是 $\langle L(X);+,0\rangle$ 的一个子群;

(iv)　A 是 $\langle L(X);+,0\rangle$ 的一个闭理想;

(v)　I 是 $\langle X;*,0\rangle$ 的一个闭理想. □

借助于元素的周期可以刻画闭理想.

定理 3.2.7(J. Meng and S. M. Wei[2])　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想. 如果 I 的每个元素的周期是有限的, 则 I 是闭的.

证明　任取 $x\in I$, 设 $|x|=n\in N$, 则 $x^n\in B(X)$. 于是

$$\begin{aligned}(0*x^{n-1})*x &= (0*(0*(0*x^{n-1})))*x\\ &= (0*x)*(0*(0*x^{n-1}))\\ &= 0*(x*(0*x^{n-1}))\\ &= 0*x^n = 0\in I.\end{aligned}$$

结合 $x\in I$ 得 $0*x^{n-1}\in I$. 重复这种作法得 $0*x\in I$. 所以 I 是闭的. □

推论 3.2.8(J. Meng and S. M. Wei[2])　周期 BCI- 代数的

每个理想是闭的，即周期 BCI- 代数是优 BCI- 代数. □

由此再次得到：BCK- 代数，结合 BCI- 代数，拟结合 BCI- 代数均是优 BCI- 代数. 下面我们证明推论 3.3.8 的逆也成立.

定理 3.2.9(J. Meng and S. M. Wei[2]) 一个 BCI- 代数是优的当且仅当它是周期的.

证明 仅需证明“仅当”部分. 由定理 3.3.4，可假设 X 是一个优 p- 半单 BCI- 代数. 如果 X 不是周期的，则存在 $x \in X$ 使得 $|x| = \infty$. 记 $I = \{x^n : n \in N\}$. 现在证明 I 是一个理想但不是闭的. 因为 $x^0 = 0$，所以 $0 \in I$. 设 $x * y \in I$ 和 $y \in I$. 分下述情形讨论：

如果 $y = 0$，则 $x = x * 0 = x * y \in I$.

如果 $x * y = 0$，则 $x = y \in I$.

如果 $x * y \neq 0$ 和 $y \neq 0$，则存在 $i, k \in N - \{0\}$ 使得 $x * y = a^i$ 和 $y = a^k$. 因此 $x * a^k = a^i$. 由定理 1.4.4(9)，

$$\begin{aligned} x &= a^i * (a^i * x) \\ &= a^i * ((x * a^k) * x) \\ &= a^i * (0 * a^k) \\ &= a^{i+k} \in I. \end{aligned}$$

所以 I 是 X 的一个理想. 我们注意 $0 * x \notin I$. 如果不然，存在 $m \in N$ 使 $0 * x = x^m$，则 $x^{m+1} = x^m * (0 * x) = 0$，故 $|x| \leqslant m + 1$，矛盾. 所以 I 不是闭的，与 X 是优的矛盾. 因此 X 是周期的. □

对于一个 BCI- 代数 X，记 $P(X) = \{x \in X : |x| < \infty\}$ 和 $P_0(X) = \{x \in L(X) : |x| > \infty\}$，称 $P(X)$ 是 X 的周期部分. 显然 $P_0(X) = P(X) \cap L(X)$.

定理 3.2.10(J. Meng and S. M. Wei[2])　设$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数，则

(a)　$P(X) = \bigcup \{V(a) \mid a \in P_0(X)\}$，

(b)　$P_0(X)$ 是 $L(X)$ 的一个子代数，

(c)　$P_0(X)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想，

(d)　$P(X)$ 是 X 的一个闭理想，

(e)　$B(X) \subseteq P(X)$，

(f)　$X/P(X) \cong L(X)/P_0(X)$，

(g)　对任意 $C_a^0 \in L(X)/P_0(X)$，$C_a^0 \neq C_0^0$ 蕴涵 $|C_a^0| = \infty$，即 $L(X)/P_0(X)$ 是非周期的，这里我们要求 $X \neq P(X)$，C_0^0 表示 $L(X)/P_0(X)$ 的零元，

(h)　$X/P(X)$ 是非周期的，这里要求 $X \neq P(X)$，

(i)　$P(X)/B(X) \cong P_0(X)$.

证明　由定理 1.5.2 得(a).

设 $a, b \in P_0(X)$，则存在 $n, m \in N - \{0\}$ 使得 $|a| = m$，$|b| = n$. 由定理 1.4.4(9) 和(10)，

$$(a * b)^{mn} = a^{mn} * b^{mn} = (a^m)^n * (b^n)^m = 0^n * 0^m = 0,$$

因此 $|a * b| \leqslant mn$，即 $a * b \in P_0(X)$. 所以 $P_0(X)$ 是 $L(X)$ 的一个子代数. (b) 成立.

由定理 3.3.4 ～ 3.3.6 得(c) 和(d).

(e) 是显然的.

定义映射 $f: X/P(X) \to L(X)/P_0(X)$ 使得 $f(C_x) = C_{a_x}^0$. 易知 f 是满射. 对 $C_x, C_y \in X/P(X)$，

$$\begin{aligned} f(C_x * C_y) &= f(C_{x*y}) = C_{a_{x*y}}^0 \\ &= C_{a_x * a_y}^0 = C_{a_x}^0 * C_{a_y}^0 \\ &= f(C_x) * f(C_y), \end{aligned}$$

因此 f 是一个同态. 为了证明 f 是一个同构，设 $C_x, C_y \in X/P(X)$

且 $C_x \neq C_y$,即 $x * y \notin P(X)$ 或 $y * x \notin P(X)$. 无妨设前者成立. 则 $a_{x*y} \notin P_0(X)$,于是 $a_x * a_y \notin P_0(X)$. 由此知 $C^0_{a_x} \neq C^0_{a_y}$,即 $f(C_x) \neq f(C_y)$. 这就是说 f 是一个同构. 所以 $X/P(X) \cong L(X)/P_0(X)$. (f) 成立.

用反证法证明(g). 如果存在 $C^0_a \in L(X)/P_0(X)$ 使得 $|C^0_a| = n \neq 1$,则 $(C^0_a)^n = C^0_{a^n} = C^0_0$. 因而 $a^n = a^n * 0 \in P_0(X)$. 故存在 $m \in N^+$ 使得 $|a^n| = m$,因此 $a^{nm} = (a^n)^m \in B(X)$,这表明 $|a| \leqslant mn$,所以 $a \in P_0(X)$. 由(c) 得 $a \in P_0(X) = C^0_a$. 故 $C^0_a = C^0_0$,矛盾. (g) 成立.

由(f) 和(g) 得(h).

(i) 的证明类似于(g),故略. □

3.3 闭理想格

设 A 是 BCI- 代数 X 的一个子集,用 $(A]_C$ 表示由 A 生成的闭理想,即包含 A 的最小闭理想. 用 $CI(X)$ 表示 X 的所有闭理想的集,对任意 $A,B \in CI(X)$,容易证明 $A \cap B \in CI(X)$ 且 $A \cap B$ 是含于 A 和 B 的最大闭理想,$(A \cup B]_C$ 是包含 A 和 B 的最小闭理想. 因此 $\langle CI(X); \subseteq \rangle$ 是一个格. 由于 $\{0\}$ 和 X 分别是这个格的最小元和最大元,所以 $\langle CI(X); \subseteq \rangle$ 是一个有界格. 若 A 是任一非空集,$I_i \in CI(X)(i \in A)$,则

$$\bigcap \{I_i : i \in A\} \in CI(X)$$

是含于 $I_i(i \in A)$ 的最大闭理想. 所以我们有

定理 3.3.1 设 X 是一个 BCI- 代数,则 $\langle CI(X); \subseteq \rangle$ 是一个完备格.

M. Palasinski[1] 证明了，对于 BCK- 代数 X，格 $\langle CI(X);\subseteq\rangle$ 是分配的. 但是这一重要结果对 BCI- 代数不成立. 这是 BCI- 代数与 BCK- 代数一个重大差别. 本节将给出一个例子说明这个结论.

为了进一步讨论，引入循环子代数的概念.

定义 3.3.1(J. Meng[7])　设 X 是一个 BCI- 代数，$x\in X$. 称包含 x 的最小子代数叫做 X 的一个*循环子代数*，记为 $\langle x\rangle$.

定理 3.3.2(J. Meng[7])　设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数. 则 $\forall\, x\in X$，

$$\langle x\rangle=\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}.$$

证明　对任意 $n,m\in\mathbf{Z}$，由定理 1.4.9 有 $x^n*x^m=x^{n-m}$. 这表明 $\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}$ 关于运算 $*$ 是封闭的，所以 $\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}$ 是 X 的一个子代数. 由于 $x=x^1\in\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}$，我们有 $\langle x\rangle\subseteq\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}$.

另一方面，由 $0,x\in\langle x\rangle$ 知 $x^{-1}=0*x\in\langle x\rangle$. 因此

$$x^2=x*x^{-1}\in\langle x\rangle,\ x^{-2}=0*x^2\in\langle x\rangle.$$

由数学归纳法，对任意 $n\in\mathbf{Z}$，$x^n\in\langle x\rangle$. 所以 $\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}\subseteq\langle x\rangle$.

综上所述，$\langle x\rangle=\{x^n:n\in\mathbf{Z}\}$.　□

定理 3.3.3(J. Meng and H. A. S. Abujabal[1])　设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数，I 是 X 的一个理想，则 I 是闭的当且仅当对任意 $x\in I$，$\langle x\rangle\subseteq I$.

证明　若 I 是闭的且 $x\in I$，则

$$x^0=0\in I,\ x^1=x\in I,\ x^{-1}=0*x\in I,$$

$$x^2=x*(0*x)\in I,\ x^{-2}=0*x^2\in I.$$

由归纳法，对任意 $n\in\mathbf{Z}$，$x^n\in I$. 所以 $\langle x\rangle\subseteq I$.

相反地,如果 $x \in I$ 蕴涵 $\langle x\rangle \subseteq I$,则 $0 * x = x^{-1} \in \langle x\rangle$,所以 $x \in I$ 蕴涵 $0 * x \in I$. 于是 I 是闭的. □

例 3.3.1 设 X 是所有正实数的集合, $\div$ 是通常的除法,则 $\langle X; \div, 1\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

证明 对 $x, y, z \in X$, $x \div 1 = x$, $x \div x = 1$,且

$$x \div (y \div z) = x \times \frac{z}{y} = z \times \frac{x}{y} = z \div (y \div x).$$

由定理 1.6.5,$\langle X; \div, 1\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数. □

我们注意,$I = \{2^n : n \in \mathbf{Z}\} = \langle 2\rangle$,所以 I 是 X 的一个闭理想,但 2 的周期是无限的. 这说明定理 3.2.7 的逆不成立.

进一步,令 $I = \langle 2\rangle$,$J = \langle 3\rangle$,$H = \langle 6\rangle$,则它们是 X 的闭理想. 因为 $\frac{1}{3} \in \langle 3\rangle$ 和 $2 \in \langle 2\rangle$,所以 $6 = 2 \div \frac{1}{3} \in (I \cup J]_C$. 于是 $H = \langle 6\rangle \subseteq (I \cup J]_C$. 由此得 $H \cap (I \cup J]_C = H$. 另一方面,$H \cap I = H \cap J = \{1\}$,因此

$$((H \cap I) \cup (H \cap J)]_C = (\{1\}]_C = \{1\}.$$

由此得

$$H \cap (I \cap J]_C \neq ((H \cap I) \cup (H \cap J)]_C.$$

所以对闭理想分配律不成立.

由定理 3.3.3,在 p- 半单 BCI- 代数中,一般地 $\{x^n : n \in N\}$ 不是一个闭理想. 自然人们会问何时它是一个闭理想?下面给出回答.

定理 3.3.4(J. Meng and H. A. S. Abujabal[1]) 设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数,$x \in X$. 则 $I = \{x^n : n \in N\}$ 是 X 的一个闭理想当且仅当 $|x| < \infty$.

证明　设 $|x| = n < \infty$，则 $I = \{0, x^1, \cdots, x^{n-1}\}$. 对任意 $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$，由定理 1.4.7 和 1.4.8 有

$$\begin{aligned} x^k * x^m &= x^{k-m} = (x^{-1})^{m-k} \\ &= (0 * x)^{m-k} = 0 * x^{m-k} \\ &= 0 * x^{n-(n-m+k)} = 0 * (x^n * x^{n-m+k}) \\ &= 0 * (0 * x^{n-m+k} = x^{n-m+k} \in I, \end{aligned}$$

$$x^m * x^k = x^{m-k} \in I.$$

所以 I 是一个子代数. 由定理 3.2.5，I 是 X 的一个闭理想.

相反地，设 $I = \{x^n : n \in N\}$ 是 X 的闭理想，则 $0 * x \in I$. 存在 $n \in N$ 使得 $0 * x = x^n$. 于是

$$x^{n+1} = x^n * (0 * x^1) = x^n * (0 * x) = 0 \in B(X).$$

这表明 x 是有限周期的.　□

作为这个定理的特殊情形，我们有

推论 3.3.5　设 X 是一个 p- 半单的周期 BCI- 代数，对任意 $x \in X$，则 $I = \{x^n : 0 \leqslant n \leqslant |x|\}$ 是 X 的一个闭理想.　□

推论 3.3.6　设 X 是一个 p- 半单的周期 BCI- 代数，则对任意 $x \in X$，$I = \{x^n : n \in N\}$ 是 X 的一个闭理想.　□

对于非周期 BCI- 代数，我们有

定理 3.3.7(J. Meng and H. A. S. Abujabal[1])　设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数，$x \in X$. 则 $I = \{a^n : n \in N\}$ 是 X 的一个理想，但可能不是闭的.

证明 $0=a^0\in I$. 设 $b*a^n\in I$. 则对某个 $m\in N$, $b*a^n=a^m$. 于是

$$\begin{aligned}0 &= (b*a^n)*a^m \\ &= (b*a^n)*(0*(0*a^m)) \\ &= (b*0)*(a^n*(0*a^m)) \\ &= b*a^{n+m},\end{aligned}$$

因此 $b=a^{n+m}$, 即 $b\in I$. 所以 I 是 X 的一个理想.

在例 3.3.1 中 $\{2^n:n\in N\}$ 是 X 的一个理想, 但不是闭的, 事实上 $1\div 2\notin\{2^n:n\in N\}$. 定理证毕. □

3.4 由集生成的闭理想

首先, 我们给出一个定理 (J. Meng and H. A. S. Abujabal[1]), 它类似于对于理想的定理 3.1.2.

为了简便, 记 $a'=0*a$, $a''=0*(0*a)$ 和

$$[x,a_1,\cdots,a_n]=(\cdots(x*a_1)*\cdots)*a_n.$$

定理 3.4.1 设 A 是 BCI-代数 X 的一个非空子集, 则 $x\in(A]_C$ 当且仅当 $\exists\, a_1,\cdots,a_n,\ b_1,\cdots,b_m\in A\cup\{0\}$ 满足

$$[x,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m]=0.$$

证明 因为 $0\in A\cup\{0\}$ 和 $0*0=0$, 所以 $0\in(A]_C$.

设 $x*y\in(A]_C$ 和 $y\in(A]_C$, 则

$$\exists\, a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m,c_1,\cdots,c_l,d_1,\cdots,d_k\in A\cup\{0\}$$

满足:

$$[x*y,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m]=0,$$

$$[y,c_1,\cdots,c_l,\ d'_1,\cdots,d'_k]=0.$$

由(a)得

$$[x,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m]\leqslant y.$$

两边同右 $*$ 乘 $c_1,\cdots,c_l,d'_1,\cdots,d'_k$ 有

$$[x,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m,c_1,\cdots,c_l,\ d'_1,\cdots,d'_k]$$
$$\leqslant [y,c_1,\cdots,c_l,\ d'_1,\cdots,d'_k]=0,$$

因此

$$[x,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m,c_1,\cdots,c_l,\ d'_1,\cdots,d'_k]=0.$$

这表明 $x\in(A]_C$. 于是$(A]_C$ 是 X 的一个理想.

若 $x\in(A]_C$,则对某些 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m\in A\cup\{0\}$ 有

$$[x,a_1,\cdots,a_n,\ b'_1,\cdots,b'_m]=0,$$

用 0 左 $*$ 乘两边得

$$[x',a'_1,\cdots,a'_n,\ b''_1,\cdots,b''_m]=0.$$

注意到 $b''_1\leqslant b_1,\ \cdots,\ b''_n\leqslant b_n$,于是

$$[x',a'_1,\cdots,a'_n,\ b_1,\cdots,b_m]=0.$$

这表明 $0*x\in(A]_C$. 所以$(A]_C$ 是一个闭理想.

若 I 是包含 A 的任一闭理想,则 $x\in A$ 蕴涵 $0*x\in I$. 所以$(A]_C\subseteq I$,即$(A]_C$ 是包含 A 的最小闭理想. □

现在给出定理 3.3.1 的一种加强.

定理 3.4.2(魏仕民和赵树濂[1]) 设 X 是一个 BCI- 代数,则$\langle CI(X);\vee,\wedge\rangle$ 是格$\langle I(X);\vee,\wedge\rangle$ 的一个完备模子格.

证明 仅需证明模律成立. 设 $I_1,I_2,I_3\in CI(X)$ 和 $I_1\subseteq I_2$. 若 $x\in I_2\wedge(I_1\vee I_3)$,则 $x\in I_2$ 和 $x\in I_1\vee I_3$. 由定理 3.1.3 存在 $a_1\in I_1$ 和 $a_3\in I_3$ 使得$(x*a_1)*a_3=0$. 所以 $x*a_1\in I_3$. 由 $x\in I_2$ 和 $I_1\subseteq I_2$ 知 $x*a_1\in I_2$,因而 $x*a_1\in I_2\wedge I_3$. 取 $a_2=x*a_1\in I_2\wedge I_3$,则$(x*a_1)*a_2=a_2*a_2=0$. 由定理 3.1.3,$x\in I_1\vee$

$(I_2 \wedge I_3)$. 这表明 $I_2 \wedge (I_1 \vee I_3) \subseteq I_1 \vee (I_2 \wedge I_3)$. 相反的包含关系是显然的. 所以 $I_2 \wedge (I_1 \vee I_3) = I_1 \vee (I_2 \wedge I_3)$. 即模律对格 $\langle CI(X); \vee, \wedge \rangle$ 成立. □

下面讨论理想和闭理想的关系.

定理3.4.3(魏仕民[1]) 设 I 是BCI-代数 X 的一个理想, 记 $I_C = \{x \in I : 0 * x \in I\}$. 则 I_C 是含于 I 的最大闭理想.

证明 对任意 $x, y \in X$, 若 $x * y \in I_C$ 和 $y \in I_C$, 则 $x * y \in I$ 和 $y \in I$. 所以 $x \in I$. 由于 $(0 * x) * (0 * y) = 0 * (x * y) \in I$ 和 $0 * y \in I$, 所以 $0 * x \in I$. 于是 $x \in I_C$. 显然 $0 \in I_C$. 因此 I_C 是一个理想. 若 $x \in I_C$ 则 $x \in I$ 和 $0 * x \in I$. 由 $0 * (0 * x) \leqslant x$, 我们得 $0 * (0 * x) \in I$. 因此 $0 * x \in I_C$. 即 I_C 是一个闭理想.

设 A 是含于 I 的任一闭理想. 对任意 $x \in A$, 则 $0 * x \in A$. 于是 $x \in I$ 和 $0 * x \in I$. 由 I_C 的定义知 $x \in I_C$. 所以 $A \subseteq I_C$. 显然 $I_C \subseteq I$. 这就证明了 I_C 是含于 I 的最大闭理想. □

定理3.4.4(魏仕民[1]) 设 I 是BCI-代数 X 的一个理想, 则对任意 $x, y \in X$, $x \sim y(\mathrm{mod} I)$ 当且仅当 $x \sim y(\mathrm{mod} I_C)$.

证明 设 $x \sim y(\mathrm{mod} I)$, 则 $x * y \in I$ 和 $y * x \in I$. 因为 $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = (0 * (0 * y)) * x \leqslant y * x$, 所以 $0 * (x * y) \in I$. 同理 $0 * (y * x) \in I$. 由 I_C 的定义, $x * y \in I_C$ 和 $y * x \in I_C$, 即 $x \sim y(\mathrm{mod} I_C)$.

相反地, 设 $x \sim y(\mathrm{mod} I_C)$, 则 $x * y \in I_C$ 和 $y * x \in I_C$. 因为 $I_C \subseteq I$, 所以 $x * y \in I$ 和 $y * x \in I$, 即 $x \sim y(\mathrm{mod} I)$. □

作为这个定理的直接结果，我们有

定理 3.4.5　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则 $\langle X/I;*,C_0\rangle \cong \langle X/I_C;*,I_C\rangle$.

证明　由定理 3.4.4，仅需证明 $C_0 = I_C$. 对任意 $x \in C_0$，则 $x = x*0 \in I$ 和 $0*x \in I$，所以 $x \in I_C$. 反之，$x \in I_C$ 则 $x*0 = x \in I$ 和 $0*x \in I$，即 $x \in C_0$. 因此 $I_C = C_0$. □

这个定理告诉我们，仅需研究 BCI- 代数关于闭理想的商代数.

例 3.4.1(J. Meng and H. A. S. Abujabal[1])　设 $X = \{(x_1,\cdots,x_n,\cdots): \exists\, k \in N^+$ 使 $x_i = 0(k<i)$；$x_i = 1$ 或 $0(i \leqslant k)\}$. 定义 $0\cdot 0 = 1\cdot 1 = 0$ 和 $0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 1$. 对任意 $(x_1,\cdots,x_n,\cdots) \in X$ 和 $(y_1,\cdots,y_n,\cdots) \in X$，定义

$$(x_1,\cdots,x_n,\cdots) * (y_1,\cdots,y_n,\cdots) = (x_1\cdot y_1,\cdots,x_n\cdot y_n,\cdots).$$

记 $\theta = (0,\cdots,0,\cdots)$. 则 $\langle X;*,\theta\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，且 $\forall\, x \in X, |x| \leqslant 2$，即 X 是一个周期 BCI- 代数.

证明　若 $(x_1,\cdots,x_n,\cdots),(y_1,\cdots,y_n,\cdots) \in X$，则 $\exists\, l,k \in N^+$ 使得

$$x_i = \begin{cases} 0, & l<i; \\ 1 \text{ 或 } 0, & i \leqslant l; \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 0, & k<i; \\ 1 \text{ 或 } 0, & i \leqslant k. \end{cases}$$

取 $m = \max\{l,k\}$，我们有

$$x_i \cdot y_i = \begin{cases} 0, & m < i; \\ 1 \text{ 或 } 0, & i \leqslant m. \end{cases}$$

这表明$(x_1,\cdots,x_n,\cdots) * (y_1,\cdots,y_n,\cdots) \in X$,因此 X 关于运算 $*$ 封闭. 容易看出,$\forall\, a,b \in \{0,1\}, a \cdot b = b \cdot a, 0 \cdot a = a, a \cdot a = 0$. 由此知,$\forall\, x,y \in X$

(1) $x * y = y * x$,

(2) $\theta * x = x$,

(3) $x * x = \theta$.

因为

$(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0)$,

$(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 1)$,

$(0 \cdot 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot (1 \cdot 0)$,

$(0 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot (1 \cdot 1)$,

$(1 \cdot 0) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot (0 \cdot 0)$,

$(1 \cdot 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot (0 \cdot 1)$,

$(1 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot 0)$,

$(1 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1 \cdot (1 \cdot 1)$,

因此 $\forall\, a,b,c \in \{0,1\}$,我们有$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. 由此知,对任 $x,y,z \in X$

(4) $(x * y) * z = x * (y * z)$.

由(4) 和(1),对任意 $x,y,z \in X$

(5) $x * (y * z) = (x * y) * z = z * (x * y) = z * (y * x)$.

由(1) 和(2) 得,$\forall\, x \in X$

(6) $x * \theta = \theta * x = x$.

结合(3),(6) 和(5),由定理 1.6.5 知$\langle X; *, \theta\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

由(1) 和(2) 知,$\forall\, x \in X$ 恒有 $x^2 = x * (\theta * x) = x * x = \theta \in B(X)$,所以 $|x| \leqslant 2$. 这表明 X 是周期的. □

有趣的是这是一个无限 BCI- 代数. 这再一次说明,周期 BCI-代数可以是无限的.

3.5　p- 理想

为了用理想刻画 p- 半单 BCI- 代数,X. H. Zhang, H. Jiang and S. A. Bhatti[1] 引入了 p- 理想的概念. J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[2], S. M. Hong, Y. B. Jun and J. Meng[1] 讨论了这类理想.

定义 3.5.1 (X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1]) BCI- 代数 X 的一个理想 I 叫做一个 p- 理想,如果它满足

(i)　$0 \in I$;

(ip)　$(x*z)*(y*z) \in I$ 和 $y \in I$ 蕴涵 $x \in I$.

定理 3.5.1(X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1])　p-理想必是一个理想.

证明　设 A 是BCI- 代数 X 的一个 p- 理想. 由定义 3.5.1(i), $0 \in A$. 如果 $x*y \in A$ 和 $y \in A$,则 $(x*0)*(y*0) \in A$ 和 $y \in A$. 由定义 3.5.1(ip), $x \in A$. 所以 A 是 X 的一个理想. □

定理 3.5.2(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[2])　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想,则 I 是一个 p- 理想当且仅当 $B(X) \subseteq I$.

证明　设 I 是一个 p- 理想,对任意 $x \in B(X)$, $0*x=0$. 由

于$(x*x)*(0*x)=0\in I$和$0\in I$,借助于定义 3.5.1(ip)得$x\in I$,因此$B(X)\subseteq I$.

相反地,设$B(X)\subseteq I$.如果$(x*z)*(y*z)\in I$和$y\in I$,则$a_y\in L(I)$且

$$\begin{aligned} a_x*a_y &= (a_x*a_y)*(a_z*a_z) \\ &= (a_x*a_z)*(a_y*a_z) \\ &= a_{(x*z)*(y*z)}\in L(I). \end{aligned}$$

由定理 3.1.5,$a_x\in L(I)$.结合$L(I)\subseteq I$,我们有$a_x\in I$.因为a_x和x属于同一个分支,由推论 1.3.6,$x*a_x\in B(X)\subseteq I$,所以$x*a_x\in I$.结合$a_x\in I$得$x\in I$.所以I是p-理想. □

由这个定理不难看出,p-半单 BCI-代数的每个理想是p-理想.

推论 3.5.3(X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1]) 设X是一个 BCI-代数,则$B(X)$是X的一个p-理想.

证明 因为$B(X)$是X的一个理想,所以由定理 3.5.2 知$B(X)$也是X的一个p-理想. □

推论 3.5.4 设I和A是BCI-代数X的理想,且$I\subseteq A$.如果I是一个p-理想,则A亦是一个p-理想.

证明 明显的. □

借助于理想可以刻画p-半单 BCI-代数.

定理 3.5.5(X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1]) 设

X 是一个 BCI- 代数，则下列条件等价：

(i)　零理想$\{0\}$是 X 的一个 p- 理想；

(ii)　X 的每个理想是 p- 理想；

(iii)　X 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

证明　因为每个理想包含$\{0\}$，由推论 3.5.4 得(i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii). 设 X 的每个理想是一个 p- 理想. 因为$\{0\}$是 X 的一个理想，因此它也是一个 p- 理想. 所以 $B(X) \subseteq \{0\}$，这等价于 $B(X) = \{0\}$. 所以 X 是 p- 半单的. (iii) 成立.

(iii)⇒(i). 设 X 是 p- 半单的，则 $B(X) = \{0\}$. 由定理 3.5.2，$\{0\}$是 X 的一个 p- 理想. (i) 成立. □

利用分支能够给出 p- 理想结构性定理.

定理 3.5.6(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[2])　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则下列条件等价：

(i)　I 是一个 p- 理想；

(ii)　$x \in I$ 蕴涵 $V(a_x) \subseteq I$；

(iii)　$I = \bigcup \{V(a) : a \in L(I)\}$.

证明　(i)⇒(ii). 设 I 是一个 p- 理想. 若 $x \in I$，由于 $a_x \leqslant x$，所以 $a_x \in I$. 对任意 $y \in V(a_x)$ 有 y 和 a_x 属于同一分支，所以 $y * a_x \in B(X) \subseteq I$. 结合 $a_x \in I$ 得 $y \in I$. 这表明 $V(a_x) \subseteq I$. (ii) 成立.

(ii)⇒(iii). 由(iii) 显然有 $a \in L(I) \subseteq I$ 蕴涵 $V(a) \subseteq I$. 相反地，对于任意 $x \in I$，则 $a_x \in L(I)$ 且 $x \in V(a_x)$. 所以 $x \in \bigcup \{V(a) : a \in L(I)\}$. 这表明 $I \subseteq \bigcup \{V(a) : a \in L(I)\}$. 因此 $I = \bigcup \{V(a) : a \in L(I)\}$. (iii) 成立.

(iii)⇒(i). 因为 $B(X) = V(0)$ 且 $0 \in L(I)$，所以 $B(X) \subseteq \bigcup$

$\{V(a); a \in L(I)\} = I$. 由定理 3.5.2, I 是一个 p- 理想. □

定理 3.5.7 设 S 是 BCI- 代数 X 的一个非空子集, 则 S 是一个 p- 理想当且仅当它满足

(i) $L(S)$ 是 $L(X)$ 的一个理想,

(ii) $S = \bigcup \{V(a); a \in L(S)\}$.

证明 由定理 3.1.5 和定理 3.5.6 直接得(i)⇒(ii).

相反地, 设 S 满足(i) 和(ii), 显然 $0 \in S$. 如果 $x * y \in S$ 和 $y \in S$, 则 $a_x * a_y = a_{x*y} \in L(S)$ 和 $a_y \in S$. 由(i) 得 $a_x \in L(S)$. 因为 $x \in V(a_x)$, 由(ii) 得 $x \in S$. 这就是说 S 是 X 的一个理想. 进一步, 由(ii) 知 $B(X) = V(0) \subseteq S$, 所以 S 是 X 的一个 p- 理想. □

定理 3.5.8 设 I 是 BCI- 代数的一个理想, 则 I 是一个 p- 理想当且仅当 $x \in I$ 和 $x \leqslant y$ 蕴涵 $y \in I$.

证明 设 I 是一个 p- 理想且 $x \in I$ 和 $x \leqslant y$. 因为 $y * x \in B(X) \subseteq I$, 所以 $y \in I$.

相反地, 设 $x \in I$ 和 $x \leqslant y$ 蕴涵 $y \in I$. 因为 $0 \in I$ 且对任意 $x \in B(X)$ 恒有 $0 \leqslant x$, 所以 $x \in I$. 这说明 $B(X) \subseteq I$. 由定理 3.5.2, I 是一个 p- 理想. □

作为这个定理的直接结果, 我们有

推论 3.5.9(X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1]) 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想, 则下列条件等价:

(i) I 是一个 p- 理想,

(ii) $(x * z) * (y * z) \in I$ 蕴涵 $x * y \in I$,

(iii)　$0*(0*x)\in I$ 蕴涵 $x\in I$.

证明　(i)⇒(ii)　因为在 BCI- 代数中恒有 $(x*z)*(y*z)\leqslant x*y$,由定理 3.5.8 得.

(ii)⇒(iii)　在 (ii) 中取 $x=z$ 和 $y=0$ 得 $0*(0*x)=(x*x)*(0*x)\in I$ 蕴涵 $x=x*0\in I$.

(iii)⇒(i)　由 (iii) 知 $0\in I$ 蕴涵 $\forall\, x\in B(X)$,$0*(0*x)=0\in I$,所以 $x\in I$,即 $B(X)\subseteq I$. 所以 I 是 p- 理想. □

现在讨论 BCI- 代数关于 p- 理想的商代数.

定理 3.5.10(X. H. Zhang, H. Jiang and A. S. Bhatti[1])
设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想,则 I 是一个 p- 理想当且仅当 X/I 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

证明　设 I 是一个 p- 理想. 设 $C_0\leqslant C_x$,由定理 3.4.5 知 $C_0=I_C$,$C_0*C_x=C_0$ 即 $0*x\sim 0(\mathrm{mod} I)$,因此 $0*x=(0*x)*0\in I$,$0*(0*x)\in I$. 因为 $0*(0*x)\leqslant x$,由定理 3.5.8,$0*x\in I$ 和 $x\in I$. 这表明 $x\in I_C$. 于是 $C_x=I_C=C_0$. 这就是说在商代数中 $\{C_0\}=B(X/I)$. 所以 X/I 是一个 p- 半单 BCI- 代数.

相反地,设 X/I 是一个 p- 半单 BCI- 代数. 对任意 $x\in B(X)$ 有 $0\leqslant x$,则 $C_0\leqslant C_x$. 由于 $B(X/I)=\{C_0\}$,因此 $C_0=C_x$,由此得

$$x=x*0\in I.$$

这表明 $B(X)\subseteq I$. 由定理 3.5.2,I 是一个 p- 理想. □

下面研究闭 p- 理想.

引理 3.5.11　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个 p- 理想. 则 $x\in I$

蕴涵 $0*x \in I$ 当且仅当 $x \in X-I$ 蕴涵 $0*x \in X-I$.

证明 假设 $x \in I$ 蕴涵 $0*x \in I$. 如果 $a \in X-I$,注意到 $0*(0*a) \leqslant a$,所以 $0*(0*a) \notin I$. 否则,由定理3.5.8知 $a \in I$,矛盾. 又因为 $0*a = 0*(0*(0*a))$,所以 $0*a \notin I$,即 $0*a \in X-I$. 这就证明了,$a \in X-I$ 蕴涵 $0*a \in X-I$.

相反地,假设 $x \in X-I$ 蕴涵 $0*x \in X-I$. 取 $a \in I$ 则 $0*(0*a) \in I$. 我们来证 $0*a \in I$. 如果 $0*a \notin I$,则 $0*(0*a) \notin I$,矛盾. 所以 $a \in I$ 蕴涵 $0*a \in I$. □

由这个引理,立即得

定理 3.5.12 一个 p-理想 I 是闭的当且仅当 $x \in X-I$ 蕴涵 $0*x \in X-I$.

证明是直接的,故略. □

定理 3.5.13(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[2]) 设 I 是 BCI-代数 X 的一个 p-理想,则下列条件等价:

(i) I 是 X 的一个闭理想;

(ii) $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想;

(iii) $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个子代数.

证明 (i)⇒(ii). 设 I 是 X 的一个闭理想. 若 $x \in L(I)$ 则 $x \in I$. 因此 $0*x \in I$,从而 $0*x \in I \cap L(I) = L(I)$. 结合定理3.1.5,$L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想,(ii) 成立.

(ii)⇔(iii) 由定理 3.2.4 可得.

(iii)⇒(i). 设 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个子代数. 仅需证明 I 是 X 的

一个子代数. 对任意$x,y\in I$,我们有$a_x,a_y\in L(I)$. 由(iii),$a_{x*y}=a_x*a_y\in L(I)$. 由定理3.5.7,$V(a_x*a_y)\subseteq I$. 因为$x*y\in V(a_{x*y})$,所以$x*y\in I$. 这就证明了I是X的一个子代数. (i)成立. □

最后给出由集生成的p-理想的某些结果.

定理3.5.14 设X是一个BCI-代数,x是X的一个固定元素. 则

(i) $(B(X)\cup\{x\}]$是包含x的最小p-理想,

(ii) $L((B(X)\cup\{x\}])=(a_x]_{L(X)}$,这儿$(a_x]_{L(X)}$是由$a_x$在$p$-半单代数$L(X)$内生成的理想,

(iii) $(B(X)\cup\{x\}]=\cup\{V(a):a\in(a_x]_{L(X)}\}$.

证明是容易的,故略. □

3.6 强理想

S. A. Bhatti[1]引入了强理想的概念,S. A. Bhatti[3],S. M. Hong,Y. B. Jun and J. Meng[1],Y. B. Jun,J. Meng and E. H. Roh[2]相继研究了它的性质.

定义3.6.1 BCI-代数X的一个理想I叫做强的,如果$a\in X-I$和$x\in I$蕴涵$x*a\in X-I$.

引理3.6.1(S. M. Hong,Y. B. Jun and J. Meng[1]) BCI-代数X的每个强理想是一个p-理想.

证明 设 I 是 X 的一个强理想且 $x \in B(X)$. 我们来证 $x \in I$. 用反证法. 如果 $x \notin I$, 则 $x \in X - I$. 注意 $0 \in I$, 由强理想的定义知 $0 * x \in X - I$. 但是 $x \in B(X)$ 蕴涵 $0 * x = 0 \in I$, 矛盾. 所以 $x \in I$. 于是我们证明了 $B(X) \subseteq I$. 由定理 3.5.2, I 是一个 p- 理想. □

这个引理的逆不成立.

例 3.6.1 设 $X = \{2^n : n \in N\}$, $\div$ 是通常的除法, 则 $\langle X; \div, 1\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数, $I = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots\}$ 是 X 的一个 p- 理想, 但不是强理想, 因为 $2^{-1} \in X - I$ 和 $1 \div 2^{-1} = 2 \in I$.

值得注意的是, 在这个例子中, I 不是闭理想.

引理 3.6.2(S. A. Bhatti[3]) BCI- 代数 X 的每个强理想是闭的.

证明 设 I 是 X 的一个强理想. 由引理 3.6.1, I 是一个 p- 理想. 对任意 $x \in X - I$, 由定义 3.6.1, $0 * x \in X - I$, 利用定理 3.5.12, I 是闭的. □

自然人们会问, 闭的 p- 理想是强理想吗?S. M. Hong, Y. B. Jun and J. Meng[1] 给出了肯定的回答.

引理 3.6.3 每个闭的 p- 理想是一个强理想.

证明 设 I 是 X 的一个闭的 p- 理想. 如果 $x \in I$ 和 $a \in X -$

I,我们需证明 $x*a \in X-I$. 用反证法,如果 $x*a \in I$,因为 I 是闭的,所以 $0*a=(x*a)*x \in I$. 另一方面,因为 I 是一个强理想,$0 \in I$ 和 $a \in X-I$,应该有 $0*a \notin I$,矛盾. 这一矛盾的出现,由于假设了 $x*a \in I$. 所以 $x*a \in X-I$. 这就证明了 I 是一个强理想. □

总结上述结果得

定理 3.6.4(S. M. Hong, Y. B. Jun and J. Meng[1])　BCI-代数 X 的一个理想 I 是强的当且仅当 I 是 X 的一个闭的 p-理想. □

我们有下述推论.

推论 3.6.5　设 X 是一个周期 BCI-代数,则 X 的理想 I 是强的当且仅当 I 是一个 p-理想.

证明　因为周期 BCI-代数的每个理想是闭的. □

推论 3.6.6(S. A. Bhatti[3])　p-半单 BCI-代数的一个理想 I 是强的当且仅当 I 是闭的.

证明　因为由定理 3.5.2 知 p-半单 BCI-代数的每个理想是 p-理想. □

推论 3.6.7　BCI-代数 X 的一个闭理想 I 是强的当且仅当 $a \in X-I$ 蕴涵 $0*a \in X-I$.

证明 由定理 3.6.4 和 3.5.12 得必要性.

充分性 设闭理想 I 满足 $a \in X - I$ 蕴涵 $0 * a \in X - I$. 仅需证明是一个 p- 理想. 对任一 $x \in B(X)$，我们断言 $x \in I$. 事实上，如果 $x \notin I$，则 $x \in X - I$. 由假设条件得 $0 * x \in X - I$. 但是 $0 * x = 0 \in I$，矛盾. 这就证明了 $x \in B(X)$ 蕴涵 $x \in I$，即 $B(X) \subseteq I$. 所以 I 是一个 p- 理想. 由定理 3.6.4，I 是一个强理想. □

定理 3.6.8(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[2]) 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个 p- 理想. 则 I 是强的当且仅当 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个强理想.

证明 必要性 设 I 是 X 的一个强理想. 则 I 是 X 的一个闭的 p- 理想. 由定理 3.5.13，$L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想. 由于 $L(X)$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，由推论 3.6.6 知 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个强理想.

充分性 设 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个强理想，则 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想. 由定理 3.2.4，I 是 X 的一个闭理想. 由定理 3.6.4，I 是 X 的一个强理想. □

对于一个 BCI- 代数 X，存在几个重要的子代数，如 BCK- 部分 $B(X)$ 是 X 的最大 BCK- 子代数；周期部分 $P(X)$ 是 X 的最大优 BCI- 子代数；p- 半单部分 $L(X)$ 是 X 的最大 p- 半单子代数. 我们知道 $B(X)$ 和 $P(X)$ 是 X 的强理想. 但 $L(X)$ 一般不是 X 的理想，在什么条件下 $L(X)$ 是 X 的一个理想?这是一个重要问题，后面将详细讨论.

Y. B. Jun and E. H. Roh[2] 引入了 BCI- 代数的 G 部分这一重要概念.

定义 3.6.2　设 X 是一个 BCI-代数. 对于 X 的非空子集 S，定义 $G(S)=\{x\in S:0*x=x\}$. 称 $G(X)$ 是 X 的 G 部分.

注意到 $0*x\in L(X)$，所以 $G(X)\subseteq L(X)$.

本节仅讨论 $G(X)$ 与强理想有关的问题，其它问题放在后面.

定理 3.6.9　设 X 是一个 p-半单的 BCI-代数，则 $G(X)$ 是 X 的一个闭理想.

证明　因为 $0*0=0$，所以 $0\in G(X)$. 若 $x*y\in G(X)$ 和 $y\in G(X)$，则 $0*(x*y)=x*y$ 和 $0*y=y$. 于是

$$x*y=0*(x*y)=(0*x)*(0*y)=(0*x)*y.$$

由定理 1.6.3(16)，$x=0*x$，即 $x\in G(X)$. 所以 $G(X)$ 是 X 的一个理想.

为了证明 $G(X)$ 是闭的，仅需注意 $x\in G(X)$ 蕴涵 $x=0*x$，因而 $0*x\in G(X)$. □

定理 3.6.10(Y. B. Jun, J. Meng and E. H. Roh[2])　设 X 是一个 BCI-代数. 则 $G(X)$ 是 X 的一个强理想当且仅当 X 是 p-半单的.

证明　设 $G(X)$ 是 X 的一个强理想，由定理 3.6.4 和定理 3.5.2，

$$B(X)\subseteq G(X)\subseteq L(X).$$

于是

$$B(X)=B(X)\cap L(X)=\{0\}.$$

所以 X 是 p-半单的.

相反地，设 X 是一个 p-半单 BCI-代数. 由定理 3.6.9，$G(X)$

是 X 的一个闭理想. 因此 $G(X)$ 是 X 的一个闭 p- 理想. 由定理 3.6.4,$G(X)$ 是 X 的一个强理想. □

D. J. Meng[1] 引入了正则理想的概念. 实际上,正则理想和强理想是等价的.

定义 3.6.3(D. J. Meng[1]) BCI- 代数 X 的一个理想 I 是正则的,如果 $x * y \in I, x \in I$ 蕴涵 $y \in I$.

定理 3.6.11(J. Meng, Y. B. Jun and X. L. Xin[1]) BCI- 代数 X 的理想 I 是强的当且仅当 I 是正则的.

证明 设理想 I 是强的. 由引理 3.6.2,I 是闭的. 如果 $x * y \in I$ 和 $x \in I$,则 $0 * y = (x * y) * x \in I$. 再次利用 I 是闭的得 $0 * (0 * y) \in I$. 由于 y 和 $0 * (0 * y)$ 属于同一个分支,所以 $y * [0 * (0 * y)] \in B(X)$. 由引理 3.6.1 知强理想 I 是一个 p- 理想. 利用定理 3.5.2 得 $B(X) \subseteq I$,于是 $y * [0 * (0 * y)] \in I$. 结合 $0 * (0 * y) \in I$ 得 $y \in I$. 所以 I 是正则的.

相反地,设 I 是一个正则理想. 首先证明 I 是闭的. 事实上,若 $y \in I$,则 $0 * (0 * y) \leqslant y$ 蕴涵 $0 * (0 * y) \in I$. 注意到 $0 \in I$,我们有 $0 * y \in I$. 所以 I 是闭的. 设 $x \in B(X)$,则 $0 * x = 0 \in I$. 由于 I 是正则的,我们有 $x \in I$. 这表明 $B(X) \subseteq I$. 由定理 3.5.2 知 I 是一个闭的 p- 理想,所以 I 是一个强理想. □

结合定理 3.6.4,我们证明了:**在 BCI- 代数中,强理想,闭的 p- 理想,正则理想这三个概念是重合的.**

3.7 (*)- 理想

受到强理想思想的启发,E. H. Roh, Y. B. Jun and S. M. Wei[1] 引入了(*)- 理想的概念.

定义 3.7.1 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想. I 叫做 X 的一个(*)- 理想,如果 I 满足

(*) $x \in I$ 和 $a \in X - I$ 蕴涵 $x * a \in I$.

不难看出,BCK- 代数的每个理想是一个(*)- 理想. 但是在一个真 BCI- 代数中,理想$\{0\}$ 不是(*)- 理想.

例 1(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设 $X = \{0,1,2,3,4,5\}$, * 运算由下表定义

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数, $I = \{0,1,2,4\}$ 是 X 的一个(*)- 理想,但是 $I \not\subseteq B(X)$ 和 $B(X) \not\subseteq I$,因为 $B(X) = \{0,1,2,3\}$. $I \not\subseteq B(X)$ 表明 I 不是正理想, $B(X) \not\subseteq I$ 表明 I 不是一个 p- 理想.

定理 3.7.1(A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设 I 是BCI- 代

数 X 的一个理想. 如果 $L(X) \subseteq I$ 则 I 是一个($*$)- 理想.

证明 取 $x \in I$ 和 $y \in X - I$. 因为 $y * a_y \in B(X)$,所以 $x * (y * a_y) \leqslant x$,因而 $x * (y * a_y) \in I$. 由于

$$
\begin{aligned}
&((x * y) * a_y) * (x * (y * a_y)) \\
&= ((x * (x * (y * a_y))) * y) * a_y \\
&\leqslant ((y * a_y) * y) * a_y \\
&= (0 * a_y) * a_y \in L(X),
\end{aligned}
$$

因此

$$((x * y) * a_y) * (x * (y * a_y)) \in I.$$

注意 $x * (y * a_y) \in I$,得 $(x * y) * a_y \in I$. 因为 $a_y \in L(X) \subseteq I$,所以 $x * y \in I$. 这表明 I 是一个($*$)- 理想. □

该定理的逆不成立.

例 3.7.2(A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设 $X = \{2^n : n \in \mathbf{Z}\}$, $\div$ 是通常的除法,则 $\langle X; \div, 1\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数,$I = \{1, 2, 2^2, \cdots\}$ 是 X 的一个理想. 因为对自然数 m 和 n, $2^{-n} \in X - I$, $1 \div 2^{-n} = 2^n \in I$ 和 $2^m \div 2^{-n} = 2^{m+n} \in I$,所以 I 是 X 的一个($*$)- 理想,但 $L(X) \nsubseteq I$,因为 $X = L(X)$.

在这个例子中 I 不是闭的. 我们自然产生一个问题:对闭理想,定理 3.7.1 的逆成立吗?回答是肯定的.

定理 3.7.2(A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个闭($*$)- 理想,则 $L(X) \subseteq I$.

证明 用反证法. 设 $L(X) \nsubseteq I$,则有 $a \in L(X) - I$,即 $a \in$

$L(X)$ 但 $a \notin I$. 由于 $a \in L(X)$，所以 $0*(0*a)=a$. 因为 I 是一个 $(*)$- 理想，由定义 3.7.1 中条件 $(*)$ 得 $0*a \in I$. 由于 I 是闭的，所以 $a=0*(0*a) \in I$. 这矛盾于 $a \notin I$. 所以 $L(X) \subseteq I$.

□

作为上述两个定理的直接结果，我们有

推论 3.7.3　设 I 是 X 的一个闭理想，则 I 是一个 $(*)$- 理想当且仅当 $L(X) \subseteq I$. □

我们知道，周期 BCI- 代数的每个理想是闭的. 所以有

推论 3.7.4　设 X 是一个周期 BCI- 代数，特别地，是一个有限 BCI- 代数. 则 X 的理想 I 是一个 $(*)$- 理想当且仅当 $L(X) \subseteq I$.

□

现在我们给出 $(*)$- 理想较简单的判别法.

定理 3.7.5(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1])　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想. 则 I 是一个 $(*)$- 理想当且仅当 $a \in X - I$ 蕴涵 $0*a \in I$.

证明　必要性　平凡的.

充分性　假设理想 I 满足：$a \in X-I$ 蕴涵 $0*a \in I$. 对任意 $x \in I$ 和 $y \in X-I$，由于

$$(x*y)*x=(x*x)*y=0*y \in I,$$

所以 $x*y \in I$. 这表明 I 是一个 $(*)$- 理想. □

定理3.7.6(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设I是X的一个理想. 则I是一个闭的(*)-理想当且仅当对任意$x \in X$, $0 * x \in I$.

证明 必要性 平凡的.

充分性 当$x \in X - I$,则$0 * x \in I$. 由定理3.7.5,I是一个(*)-理想. 当$x \in I$则$0 * x \in I$. 这说明I是一个闭理想. 所以I是一个闭的(*)-理想. □

定理3.7.7(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设X是一个BCI-代数,I是X的一个非空子集. 则I是X的一个闭的(*)-理想当且仅当(1)$0 \in I$和(2)对任意$x,y,z \in X$,$x * y \in I$和$y \in I$蕴涵$x * z \in I$.

证明 设I是X的一个闭的(*)-理想. 如果$x * y \in I$和$y \in I$,由理想的定义知$x \in I$. 对任意$z \in X - I$,由条件(*)知$x * z \in I$. 对任意$z \in I$,由I是闭的知$x * z \in I$. 所以对任意$z \in X$,$x * z \in I$. 即I满足(2). 显然I满足(1).

相反地,设I满足(1)和(2). 在(2)中取$z = 0$,则I满足条件$x * y \in I$和$y \in I$蕴涵$x \in I$. 结合条件(1)知I是X的一个理想. 在(2)中取$x = y = 0$得$\forall z \in X$,$0 * z \in I$. 由定理3.7.6知,I是一个闭的(*)-理想. □

用$(A]_*$表示X中包含集合A的最小闭的(*)-理想,则有

定理3.7.8 $(A]_* = (A \cup L(X)]$.

证明 平凡的. □

下面给出(∗)-理想的扩张性质.

定理 3.7.9(Y. B. Jun, J. Meng and E. H. Roh[1])　设 I 是 BCI-代数 X 的一个(∗)-理想,A 是 X 的一个理想且 $I\subseteq A$. 则 A 也是一个(∗)-理想.

证明　设 $a\in X-A$. 由 $I\subseteq A$ 得 $a\in X-I$. 因为 I 是一个(∗)-理想,由定理 3.7.5 知 $0*a\in I$. 因 $I\subseteq A$,所以 $0*a\in A$. 利用定理 3.7.5,A 是一个(∗)-理想. □

现在给出 BCI-代数关于(∗)-理想的商代数.

定理 3.7.10　设 I 是 BCI-代数 X 的一个闭理想,则 X/I 是一个 BCK-代数当且仅当 I 是 X 的一个(∗)-理想.

证明　设 I 是 X 的一个闭的(∗)-理想. 由定理 3.7.5,对任意 $x\in X$ 有 $0*x\in I$. 注意到 $I=C_0$,所以 $C_{0*x}=C_0$. 由此知 $C_0*C_x=C_0$,即 $C_x\in B(X/I)$,或 $X/I=B(X/I)$. 因而 X/I 是一个 BCK-代数.

相反地,假设 X/I 是一个 BCK-代数,则 $\forall\, x\in X$ 有 $C_0*C_x=C_0$,即 $C_{0*x}=C_0=I$,于是 $0*x\in I$. 由定理 3.7.5,I 是一个(∗)-理想. □

3.8　正定关联理想

刘用麟和张小红[1] 引入了正定关联理想,借此给出了正定

关联 BCI- 代数的理想刻画.

定义 3.8.1 设 X 是一个 BCI- 代数,I 是 X 的一个非空子集,称 I 是 X 的一个*正定关联理想*,如果对任意的 $x,y,z \in X$,I 满足:

(i) $0 \in I$;

(ii) $((x*z)*z)*(x*y) \in I$ 和 $y \in I$ 蕴涵 $x*z \in I$.

定理 3.8.1 正定关联理想必是理想,但其逆不成立.

证明 在定义 3.8.1(ii) 中取 $z=0$ 即知正定关联理想是理想. 下列说明其逆不成立.

例 3.8.1 设 $X=\{0,1,2\}$,运算 $*$ 由下表给出

*	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,零理想 $\{0\}$ 不是正定关联的,因为

$$((2*1)*1)*(0*1)=(1*1)*0=0,\ 0\in\{0\}.$$

但 $2*1=1\notin\{0\}$. □

定理 3.8.2 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想,则下列条件等价:

(i) I 是正定关联的;

(ii) $((x*z)*z)*(y*z)\in I$ 蕴涵 $(x*y)*z\in I$,

(iii) $((x*y)*y)*(0*y)\in I$ 蕴涵 $x*y\in I$,

(iv) $(x*(x*y))*(y*x)\in I$ 蕴涵

$$x*(x*(y*(y*x)))\in I.$$

证明　(i)⇒(ii)　因为

$$\begin{aligned}&\{[(x*y)*z]*z\}*(0*z)\\&=\{[(x*y)*z]*y\}*((y*y)*z)\\&=\{[(x*z)*z]*y\}*((y*z)*y)\\&\leqslant((x*z)*z)*(y*z),\end{aligned}$$

所以当$((x*z)*z)*(y*z)\in I$时，就有

$$\{[(x*y)*z]*z\}*(0*z)\in I.$$

结合$0\in I$，得$(x*y)*z\in I$. (ii) 成立.

(ii)⇒(iii)　在(ii) 中令$y=0$，即得(iii).

(iii)⇒(iv)　假设$(x*(x*y))*(y*x)\in I$. 因为

$$\begin{aligned}&\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y)\\&\leqslant[x*(y*x)]*(x*y)\\&=[x*(x*y)]*(y*x)\in I,\end{aligned}$$

我们有$\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y)\in I$. 注意到

$$\begin{aligned}&\{y*[x*(y*(y*x))]\}*[y*(x*y)]\\&\leqslant(x*y)*\{x*[y*(y*x)]\}\\&\leqslant[y*(y*x)]*y=0*(y*x),\end{aligned}$$

便得

$$\{y*[x*(y*(y*x))]\}*[0*(y*x)]\leqslant y*(x*y).$$

为了清楚，记$s=y*x,\ t=x*(y*s)$. 上述不等式即为

$$(y*t)*(0*s)\leqslant y*(x*y).$$

此式同右 $*$ 乘 s 两次得

$$\begin{aligned}&\{[(y*t)*s]*s\}*(0*s)\\&\leqslant[(y*s)*s]*(x*y)\\&=\{[y*(y*x)]*(y*x)\}*(x*y)\in I.\end{aligned}$$

所以

$$\{[(y*t)*s]*s\}*(0*s)\in I.$$

由(iii) 得$(y*t)*s\in I$. 因为$0*t=0$和

$$\begin{aligned}&[(x*t)*t]*(0*t)\\=\ &(x*t)*t\\=\ &(x*t)*[x*(y*s)]\\\leqslant\ &(y*s)*t\in I,\end{aligned}$$

因此$[(x*t)*t]*(0*t)\in I$. 由(iii)得$x*t\in I$,即

$$x*\{x*[y*(y*x)]\}\in I.$$

(iv)成立.

(iv)⇒(i) 设$[(x*y)*y]*(0*y)\in I$. 因为

$$\begin{aligned}&\{(x*y)*[(x*y)*x]\}*[x*(x*y)]\\=\ &\{[x*(x*(x*y))]*y\}*[(x*y)*x]\\=\ &[(x*y)*y]*(0*y),\end{aligned}$$

所以

$$\{(x*y)*[(x*y)*x]\}*[x*(x*y)]\in I.$$

由(iv)得

$$x*y=(x*y)*\{(x*y)*[x*(x*(x*y))]\}\in I.$$

这就证明了I是正定关联的. (i)成立. □

定理 3.8.3 设I是X的一个正关联理想,A是X的任一理想,满足$I\subseteq A$,则A是正定关联的.

证明 设$u=[(x*y)*y]*(0*y)\in A$,则

$$\begin{aligned}&\{[(x*u)*y]*y\}*(0*y)\\=\ &\{[(x*y)*y]*(0*y)\}*u\in I.\end{aligned}$$

由定理3.8.2(iii)得$(x*u)*y\in I$,从而$(x*y)*u\in I\subseteq A$. 结合$u\in A$得$x*y\in A$. 所以A是正定关联理想. □

推论 3.8.4 BCI-代数X的所有理想是正定关联的当且仅当零理想$\{0\}$是正定关联的.

下述定理给出了正定关联 BCI- 代数的理想特征.

定理 3.8.5　BCI- 代数 X 是正定关联的当且仅当它的每个理想是正定关联的.

证明　设 X 是正定关联 BCI- 代数,由推论 2.7.8 知

$$x * y = ((x * y) * y * (0 * y).$$

如果 I 是 X 的任一个理想,显然有

$$((x * y) * y) * (0 * y) \in I$$

蕴涵 $x * y \in I$,即 I 是正定关联的.

相反地,设 X 的每个理想是正定关联的,则$\{0\}$ 是正定关联的. 对任意 $x,y \in X$,因为

$$\begin{aligned}&\{[(x * (((x * y) * y * (0 * y))) * y] * y\} * (0 * y)\\ =\ &\{[(x * y) * y] * (0 * y)\} * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\}\\ =\ &0 \in \{0\},\end{aligned}$$

由定理 3.8.2(iii) 得

$$\{x * [((x * y) * y) * (0 * y)]\} * y \in \{0\},$$

即

$$(x * y) * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} = 0,$$

$$x * y \leqslant [(x * y) * y] * (0 * y).$$

相反的不等式是显然的,所以

$$x * y = [(x * y) * y] * (0 * y).$$

由推论 2.7.8,X 是一个正定关联理想. □

推论 3.8.6　在 BCI- 代数 X 中下列条件等价:

(i)　X 是一个正定关联 BCI- 代数;

(ii)　X 的每个理想是正定关联的;

(iii) 零理想是正定关联的.

定理 3.8.7 设 I 是 BCI-代数 X 的一个理想,则 I 是正定关联的当且仅当 $\langle X/I; *, C_0\rangle$ 是一个正定关联 BCI-代数.

证明 若 X/I 是正定关联 BCI-代数,由推论 2.7.8 知

$$[(C_x * C_y) * C_y] * (C_0 * C_y) = C_x * C_y,$$
$$C_{[(x*y)*y]*(x*y)} = C_{x*y}.$$

因此

$$(x * y) * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} \in I.$$

如果 $[(x * y) * y] * (0 * y) \in I$,由理想性质得 $x * y \in I$. 所以 I 是正定关联理想. 这就证明了"当"部分.

假设 I 是正定关联理想,为了证明 X/I 是正定关联 BCI-代数. 任取 $C_x, C_y \in X/I$. 如果

$$[(C_x * C_y) * C_y] * (C_0 * C_y) \in \{C_0\},$$

则 $C_{[(x*y)*y]*(x*y)} = C_0$. 由此得

$$[(x * y) * y] * (x * y) \in I,$$
$$0 * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} \in I.$$

上述第 2 式即为:

$$\{[(0 * x) * (0 * y)] * (0 * y)\} * [0 * (0 * y)] \in I.$$

利用 I 的正定关联性得:

$$(x * y) * 0 = x * y \in I,$$
$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) \in I.$$

所以 $x * y \sim 0$,即 $C_x * C_y = C_{x*y} = C_0 \in \{C_0\}$. 以上证明了 X/I 的零理想 $\{C_0\}$ 是正定关联的. 因此 X/I 是正定关联 BCI-代数. □

定理 3.8.8 对任何 BCI-代数,$B(X)$ 是一个正定关联理想.

证明　因为 $X/B(X)$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，由定理 2.7.1，它的每个理想是正定关联的. 所以 $B(X)$ 是正定关联理想. □

由这个定理和定理 3.5.2 得

推论 3.8.9　每个 p- 理想是正定关联的. □

3.9　可换理想

J. Meng[6] 引入了可换理想以刻画可换 BCI- 代数. 本节介绍这篇文章的主要结果.

定义 3.9.1　BCI- 代数 X 的一个非空子集 I 叫做一个可换理想，如果它满足 (i) $0 \in I$ 和 (ii) $(x * y) * z \in I$ 和 $z \in I$ 蕴涵 $x * ((y * (y * x)) * (0 * (0 * (x * y)))) \in I$.

显然，p- 半单 BCI- 代数的每个理想是一个可换理想.

定理 3.9.1　可换理想必是一个理想.

证明　设 I 是 X 的一个可换理想. 若 $x * z \in I$ 和 $z \in I$ 则 $(x * 0) * z \in I$ 和 $z \in I$. 由 (ii) 得

$$x = x * ((0 * (0 * x)) * (0 * (0 * (x * 0)))) \in I,$$

所以 I 是 X 的一个理想. □

例 3.9.1　设 $X = \{0,1,2,3,4\}$，运算 $*$ 由下表给出

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
2	2	2	0	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	3	0

则$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数,$\{0,1\}$是X的一个理想但不是可换的.

定理3.9.2 一个理想I是可换的当且仅当它满足:$x*y\in I$蕴涵$x*((y*(y*x))*(0*(0*(x*y))))\in I$.

证明 平凡的. □

定理3.9.3 一个闭理想I是可换的当且仅当它满足

(i) $x*y\in I$蕴涵$x*(y*(y*x))\in I$.

证明 为了简单,记$x'=0*x,x''=(x')',\cdots$. 显然$x'''=x'$. 设I是一个闭理想且$x*y\in I$,则$0*(x*y)\in I$. 由定理3.9.2知$x*y\in I$蕴涵

$$x*((y*(y*x))*(0*(0*(x*y))))\in I.$$

因为

$$\begin{aligned}&\{x*[y*(y*x)]\}*\{x*[(y*(y*x))*(x*y)'']\}\\ \leqslant&\{[y*(y*x)]*(x*y)''\}*[y*(y*x)]\\ =&(x*y)'''\\ =&0*(x*y)\in I,\end{aligned}$$

所以由定理1.6.1知$x*(y*(y*x))\in I$.

相反地,设闭理想I满足(i)且$x*y\in I$则

$$x*(y*(y*x))\in I.$$

注意$(x*y)''\in I$且

$$\begin{aligned}&\{x*((y*(y*x))*(x*y)''\}*\{x*(y*(y*x))\}\\ \leqslant&[y*(y*x)]*\{[y*(y*x)]*(x*y)''\}\\ \leqslant&x''=0*(0*(x*y)),\end{aligned}$$

由定理 1.6.1 知

$$x*((y*(y*x))*(0*(0*(x*y))))\in I.$$

因此I是可换的. □

定理 3.9.4　设I和A是BCI-代数X的两个理想且$I\subseteq A$. 如果A是闭的且I是可换的,则A亦是可换的.

证明　设$x*y\in A$. 为了简单记$u=x*y$,则$0*u\in A$. 注意$(x*u)*y=0\in I$,由定理 3.9.2 知

$$\begin{aligned}&(x*u)*(y*(y*(x*u)))\\ =&(x*u)*\{[y*(y*(x*u))]*((x*u)*y)''\}\\ \in&I,\end{aligned}$$

这里

$$((x*u)*y)''=0*\{0*[(x*u)*y]\}.$$

由$I\subseteq A$,我们有$(x*u)*(y*(y*(x*u)))\in A$,即

$$(x*(y*(y*(x*u))))*u\in A.$$

结合$u\in A$得$x*(y*(y*(x*u)))\in A$. 因为

$$\begin{aligned}&\{x*[y*(y*x)]\}*\{x*[y*(y*(x*u))]\})\\ \leqslant&\{y*[y*(x*u)]\})*[y*(y*x)]\\ \leqslant&(y*x)*(y*(x*u))\\ \leqslant&(x*u)*x\\ =&0*u\in A,\end{aligned}$$

由定理 1.6.1 得$x*(y*(y*x))\in A$. 因此A是可换的. □

现在给出可换 BCI- 代数的理想刻画.

定理 3.9.5 设 X 是一个 BCI- 代数,则下列命题等价:

(i) X 是可换的.

(ii) X 的每个闭理想是可换的.

(iii) 零理想$\{0\}$是可换的.

证明 (i)⇒(ii) 设 X 是可换的,I 是 X 的一个闭理想. 如果 $x*y\in I$ 则 $0*(x*y)\in I$. 由定理 2.4.10 有

$$\begin{aligned}&(x*(y*(y*x)))*(x*y)\\&=(x*(x*y))*(y*(y*x))\\&=\{y*[y*(x*(x*y))]\}*(y*(y*x))\\&\leqslant(y*x)*\{y*[x*(x*y)]\}\\&\leqslant(x*(x*y))*x\\&=0*(x*y)\in I,\end{aligned}$$

于是 $x*(y*(y*x))\in I$. 利用定理 3.9.3,I 是一个可换理想.

(ii)⇒(iii) 由$\{0\}$是一个闭理想直接可得.

(iii)⇒(i) 设 $x\leqslant y$,即 $x*y=0\in\{0\}$. 因为$\{0\}$是一个闭理想,由定理 3.9.3 得

$$x*(y*(y*x))\in\{0\},$$

即

$$x*(y*(y*x))=0.$$

结合 BCI-2 有 $x=y*(y*x)$. 这表明 X 是可换. □

定理 3.9.6 设 I 是一个闭理想,则 I 是可换的当且仅当 $\langle X/I;*,I\rangle$ 是一个可换 BCI- 代数.

证明　设 I 是一个闭可换理想. 如果 $C_x * C_y = C_0 = I$，则 $x * y \in I$. 由定理 3.9.3，$x * (y * (y * x)) \in I$. 因此

$$C_x * (C_y * (C_y * C_x)) = C_{x*(y*(y*x))} = C_0.$$

这就是说 X/I 是一个可换 BCI- 代数.

相反地，设 $\langle X/I; *, I\rangle$ 是一个可换 BCI- 代数，则 $\{C_0\}$ 是 X/I 的一个闭的可换理想. 如果 $x * y \in I$，则

$$C_x * C_y = C_{x*y} = I = C_0 \in \{C_0\},$$

于是

$$C_{x*(y*(y*x))} = C_x * (C_y * (C_y * C_x)) \in \{C_0\},$$

即 $x * (y * (y * x)) \in C_0 = I$. 由定理 3.9.3，$I$ 是可换的. □

引理 3.9.7　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 和 $\langle X_1; *_1, 0_1\rangle$ 是 BCI- 代数，$f: X \to X_1$ 是一个同态映射. 则 $\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的一个闭理想.

证明　$\mathrm{Ker}(f)$ 是 X 的理想的证明容易的，故略. 仅需证明 $\mathrm{Ker}(f)$ 是闭的. 取 $x \in \mathrm{Ker}(f)$，则 $f(x) = 0_1$. 因为 $f(0 * x) = f(0) * f(x) = 0_1 * 0_1 = 0_1$，所以 $0 * x \in \mathrm{Ker}(f)$. 这就说明 $\mathrm{Ker}(f)$ 是闭的. □

推论 3.9.8　设 $f: X \to X_1$ 是一个满同态，则 $\mathrm{Ker}(f)$ 是一个可换理想当且仅当 X_1 是一个可换 BCI- 代数.

证明　由定理 1.6.6，$X/\mathrm{Ker}(f) \cong X_1$，然后利用定理 3.9.6 和引理 3.9.7 即得所需结果. □

3.10 关联理想

遵照前两节的思想，为了用理想刻画关联 BCI- 代数，Y. L. Liu 和 J. Meng[1] 在 BCI- 代数中引入了关联理想的概念，并讨论了它的性质. 本节仍然采用记号 $x' = 0 * x$.

定义 3.10.1 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个非空子集，则 I 叫做 X 的一个*关联理想*，如果 I 满足(i) $0 \in I$ 和

(ii) 对任意 $x, y, z \in X$,

$$(((x * y) * y) * (0 * y)) * z \in I \text{ 和 } z \in I \text{ 蕴涵}$$
$$x * ((y * (y * x)) * (0 * (0 * (x * y)))) \in I.$$

如果 X 是一个 BCK- 代数，则对任意 $x \in X$ 恒有 $0 * x = 0$，所以我们有

定理 3.10.1 设 X 是一个 BCK- 代数，I 是 X 的一个非空子集，则 I 是一个关联理想当且仅当对任意 $x, y, z \in X$，我们有

$$((x * y) * y) * z \in I \text{ 和 } z \in I \text{ 蕴涵}$$
$$x * ((y * (y * x))) \in I.$$

下述结论是明显的.

定理 3.10.2 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则 I 是关联的当且仅当

$$((x * y) * y) * y' \in I \text{ 蕴涵}$$
$$x * [(y * (y * x)) * (x * y)''] \in I.$$

容易看出,一个 p- 半单 BCI- 代数的任何理想总是一个关联理想.

例 3.10.1　设 $X = \{0,1,2\}$,乘法表为

*	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

则 $I = \{0,1\}$ 是 BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 的一个关联理想.

下面我们讨论关联理想同其它理想的关系.

定理 3.10.3　任一个关联理想都是理想,但其逆不成立.

证明　设 I 是一个关联理想,在定义 3.10.1(ii) 中令 $y = 0$ 得 $x * z \in I$ 和 $z \in I$ 蕴涵 $x \in I$. 所以 I 是 X 的一个理想.

下例表明其逆不成立.

例 3.10.2　$X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 表为

*	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数, $I = \{0\}$ 是 X 的一个理想,但不是关联的,因为 $((1 * 2) * 2) * (0 * 2) = 0$ 但是

$$1 * ((2 * (2 * 1)) * (1 * 2)'')$$

$= 1 * ((2 * 2) * 0) = 1 \neq 0.$ □

定理 3.10.4 任一关联理想是正定关联的，但其逆不成立.

证明 设 I 是 X 的一个关联理想. 由定理 3.10.3 知，I 是一个理想. 为证 I 是正定关联的，由定理 3.8.2(iii)，仅需证明

$$[(x * y) * y] * (0 * y) \in I \text{ 蕴涵 } x * y \in I.$$

现在假设 $[(x * y) * y] * (0 * y) \in I$. 由定理 3.10.2,

$$x * \{[y * (y * x)] * (x * y)'' \in I.$$

因为

$$\begin{aligned}
&(x * y) * \{x * [(y * (y * x)) * (x * y)'']\} \\
\leqslant &\{[y * (y * x)] * (x * y)''\} * y \\
= &[0 * (y * x)] * (x * y)'' \\
\leqslant &[0 * (x * y)] * (y * x) \\
= &0,
\end{aligned}$$

所以 $x * y \in I$. 这就证明了，I 是正定关联的.

在例 3.10.2 中，零理想 $\{0\}$ 是一个正定关联理想，但不是关联的. □

定理 3.10.5 任一关联理想是可换的，但其逆不成立.

证明 假设 I 是 X 的一个关联理想，且 $x * y \in I$. 由于

$$\{[(x * y) * y] * y'\} * (x * y) = y' * y' = 0,$$

所以 $[(x * y) * y] * (0 * y) \in I$. 利用定理 3.10.4，我们有

$$x * \{[y * (y * x)] * [0 * (0 * (x * y))]\} \in I.$$

这就证明了 I 是可换的.

定理的后半部分由下例说明.

例 3.10.3 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，$*$ 表为

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	4
1	1	0	0	0	4
2	2	1	0	1	4
3	3	1	1	0	4
4	4	4	4	4	0

则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，$\{0\}$ 可换理想，但不是关联的. 事实上，

$$[(2*1)*1]*(0*1)=0\in\{0\},$$

但是

$$\begin{aligned}2*\{[(1*(1*2)]*(2*1)''\} &= 2*\{[1*(0*1)]\}\\ &= 2*1\\ &= 1\notin\{0\}.\end{aligned}$$

□

定理 3.10.6　BCI- 代数 X 的一个理想 I 是关联的当且仅当 I 既是正定关联的也是可换的.

证明　"仅当"部分由定理 3.10.4 和 3.10.5 可得.

"当"部分. 设 I 既是一个正定关联理想又是一个可换理想. 如果

$$((x*y)*y)*(0*y)\in I,$$

由定理 3.8.2(iii) 得 $x*y\in I$. 因为 I 是可换理想，所以

$$x*\{[y*(y*x)]*[0*(0*(x*y))]\}\in I.$$

这表明 I 是一个关联理想.

在进一步讨论之前，我们指出在 BCI- 代数中有下列恒等式：

(1)　$\{x*[(y*(y*x))*(x*y)'']\}'=(x*y)'$;

(2)　$\{[(x*y)*y]*y'\}'=(x*y)'$;

(3)　$\{x*[(y*(y*x))*(x*y)'']\}'$

$$= \{[(x * y) * y] * y'\}'.$$

注意到由(1)和(2)知道(3)成立,我们仅给出(1)和(2)的证明如下:

$$\begin{aligned}
&\{x * [(y * (y * x)) * (x * y)'']\}' \\
&= x' * \{[y' * (y' * x')] * (x * y)'''\} \\
&= x' * (x' * (x * y)') \\
&= (x * y)';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{[(x * y) * y] * y'\}' \\
&= [(x * y)' * y'] * y'' \\
&= [y''' * (x * y)] * y' \\
&= [y' * (x * y)] * y' \\
&= (x * y)'.
\end{aligned}$$

现在我们给出闭理想是关联的一个充要条件.

定理 3.10.7 设 I 是BCI-代数 X 的一个闭理想,则 I 是关联的当且仅当 I 满足:$\forall\ x,y,z \in X$

(i) $[(x * y) * y] * (0 * y) \in I$ 蕴涵 $x * [y * (y * x)] \in I$.

证明 假设 I 是关联的,且$[(x * y) * y] * (0 * y) \in I$. 由定理 3.10.2 有

(4) $x * \{[y * (y * x)] * (x * y)''\} \in I$.

由 I 的闭性我们有 $0 * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} \in I$. 利用(2)得

(5) $0 * (x * y) \in I$.

因为

$$\begin{aligned}
&\{x * [y * (y * x)]\} * \{x * [(y * (y * x)) * (x * y)'']\} \\
&\leqslant \{[y * (y * x)] * (x * y)''\} * [y * (y * x)] \\
&= (x * y)''' \\
&= 0 * (x * y) \in I,
\end{aligned}$$

结合(4) 得 $x*[y*(y*x)]\in I$. 必要性得证.

相反地,假设I满足(i),并且$[(x*y)*y]*(0*y)\in I$. 首先利用 I 的闭性和(2) 得 $0*(x*y)\in I$ 和$(x*y)''\in I$. 其次由(i)我们有 $x*[y*(y*x)]\in I$. 因为

$$\begin{aligned}&\{x*[(y*(y*x))*(x*y)'']\}*\{x*[y*(y*x)]\}\\ &\leqslant [y*(y*x)]*\{[y*(y*x)]*(x*y)''\}\\ &\leqslant (x*y)''\in I,\end{aligned}$$

所以 $x*\{[y*(y*x)]*(x*y)''\}\in I$. 这就证明了 I 是一个关联理想. 充分性得证. □

关于关联理想的分布状态,我们有

定理 3.10.8　假设 I 是 BCI- 代数 X 的理想,A 是 X 的一个闭理想. 如果 I 是关联的,且 $I\subseteq A$,则 A 也是关联的.

证明　设$[(x*y)*y]*(0*y)\in A$. 记

$$t=[(x*y)*y]*(0*y),$$

则 $t\in A$. 由于 A 是闭的,所以 $0*t\in A$. 易知

$$\{[(x*t)*y]*y\}*(0*y)=0\in I.$$

由 I 的关联性和定理 3.10.2,我们有

$$(x*t)*\{[y*(y*(x*t))]*((x*t)*y)''\}\in I\subseteq A.$$

但是由恒等式(1) 知

$$\begin{aligned}0*t&=0*\{[(x*y)*y]*(0*y)\}\\ &=0*(x*y),\end{aligned}$$

$$0*[(x*y)*t]=[0*(x*y)]*(0*t)=0,$$

$$0*\{0*[(x*t)*y]\}=0*\{0*[(x*y)*t]\}=0.$$

所以

$$\{x*[y*(y*(x*t))]\}*t$$

$$= (x * t) * \{y * [y * (x * t)]\}$$
$$\in A.$$

结合 $t \in A$,我们有

$$x * \{y * [y * (x * t)]\} \in A.$$

由于

$$\{x * [y * (y * x)]\} * \{x * [y * \{y * \{x * t))]\}$$
$$\leqslant \{y * [y * (x * t)] * [y * (y * x)]$$
$$\leqslant (y * x) * [y * (x * t)]$$
$$\leqslant (x * t) * x$$
$$= 0 * t \in A,$$

所以 $x * [y * (y * x)] \in A$. 这就证明了 A 是关联的. □

下面我们给出关联 BCI- 代数的理想特征.

定理 3.10.9 对任一 BCI- 代数 X,下述条件等价:

(i) X 是一个关联 BCI- 代数,

(ii) X 的每个闭理想是关联的,

(iii) X 的零理想$\{0\}$是关联的.

证明 假设 X 是一个关联 BCI- 代数,而 I 是 X 的一个闭理想. 由定理 2.6.3,X 既是正定关联的又是可换的. 现在取

$$[(x * y) * y] * (0 * y) \in I.$$

由 I 的闭性得

$$0 * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} \in I.$$

利用推论 2.7.9(ii),定理 2.4.10 和恒等式(2) 有

$$\{x * [y * (y * x)]\} * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\}$$
$$= \{x * [y * (y * x)]\} * (x * y)$$
$$= [x * (x * y)] * [y * (y * x)]$$

$$= \{y * [y * (x * (x * y))]\} * [y * (y * x)]$$
$$= \{y * [y * (y * x)]\} * \{y * [x * (x * y)]\}$$
$$= (y * x) * \{y * [x * (x * y)]\}$$
$$\leqslant [x * (x * y)] * x$$
$$= 0 * (x * y)$$
$$= 0 * \{[(x * y) * y] * (0 * y)\} \in I,$$

于是 $x * [y * (y * x)] \in I$. 这就证明了 I 是一个关联理想. 所以 (i)⇒(ii).

(ii)⇒(iii) 是平凡的.

(iii)⇒(i)　假设 X 的零理想 $\{0\}$ 是关联的. 由定理 3.10.6, $\{0\}$ 既是一个正定关联理想又是一个可换理想. 由推论 3.8.6 和定理 3.9.5(iii) 得 X 既是一个正定关联 BCI- 代数又是一个可换 BCI- 代数. 利用定理 2.6.3 得 X 是一个关联 BCI- 代数. (i) 成立.

□

定理 3.10.10　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个闭理想, 则 I 是关联的当且仅当商代数 $\langle X/I; *, C_0\rangle$ 是一个关联 BCI- 代数.

证明　假设 I 是 X 的一个闭的关联理想, 如果

$$[(C_x * C_y) * C_y] * (C_0 * C_y) \in \{C_0\},$$

则 $C_{[(x*y)*y]*(0*y)} = C_0$, 即

$$[(x * y) * y] * (0 * y) \in I.$$

由定理 3.10.7, $x * [y * (y * x)] \in I$. 因此

$$C_x * [C_y * (C_y * C_x)] = C_{x*[y*(y*x)]}$$
$$= I = C_0 \in \{C_0\},$$

这说明商代数的零理想 $\{C_0\}$ 是关联的. 由定理 3.10.9, $\langle X/I; *, C_0\rangle$ 是一个关联 BCI- 代数.

相反地, 假设 X/I 是关联的. 由定理 3.10.9, 零理想 $\{C_0\}$ 是关

联的. 如果$[(x*y)*y]*(0*y)\in I$,则

$$[(C_x*C_y)*C_y]*(C_0*C_y)=C_{[(x*y)*y]*(0*y)}$$
$$=I=C_0\in\{C_0\}.$$

由定理 3.10.7,

$$C_{x*[y*(y*x)]}=C_x*[C_y*(C_y*C_x)]\in\{C_0\}.$$

所以,$x*[y*(y*x)]\in I$. 由定理 3.10.7,我们知道,I 是 X 的一个关联理想. □

推论 3.10.11 假设 X 是一个 BCI- 代数,则

$$B(X)=\{x\in X:0*x=0\}$$

是 X 的一个关联理想.

证明 因为 $X/B(X)$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数,而 p- 半单 BCI- 代数的每个理想是关联的,由定理 3.10.10,$B(X)$ 是一个关联理想. □

本节最后,我们讨论 p- 理想与关联理想的关系.

定理 3.10.12 BCI- 代数 X 的每个 p- 理想总是关联的,但其逆不成立.

证明 设 I 是 X 的任一个 p- 理想. 为了证明 I 是关联的,任取$[(x*y)*y]*(0*y)\in I$. 注意到

$$[((x*y)*y)*(0*y)]''\leqslant[(x*y)*y]*(0*y),$$

我们有

$$[((x*y)*y)*(0*y)]''\in I.$$

利用恒等式(3) 得

$$\{x*[(y*(y*x))*(x*y)'']\}''\in I.$$

由推论 3.5.9(iii)，我们知

$$x*\{[y*(y*x)]*(x*y)''\}\in I.$$

这就证明了 I 是一个关联理想. □

3.11　K- 正定关联理想

在 BCK- 代数中，K. Iséki 引入了正定关联理想的概念，C. S. Hoo[5] 将这一概念移植到 BCI- 代数. 为了不致混淆，我们称它为 K- 正定关联理想.

定义 3.11.1(K. Iséki and S. Tanaka[1])　BCI- 代数 X 的一个非空子集 I 叫做 X 的一个 K- 正定关联理想，如果(i)　$0\in I$，(ii)　$(x*y)*z\in I$ 和 $y*z\in I$ 蕴涵 $x*z\in I$.

定理 3.11.1　K- 正定关联理想必是理想. 但其逆不成立.

证明　设 I 是 BCI- 代数 X 的一个 K- 正定关联理想. 如果 $x*y\in I$ 和 $y\in I$ 则 $(x*y)*0\in I$ 和 $y*0\in I$. 由(ii) 得 $x=x*0\in I$. 所以 I 是一个理想.

后半部分由下例说明. 设 $X=\{0,1\}$，$0*0=1*1=0$，$0*1=1*0=1$，则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数，$\{0\}$ 是它的一个理想，但不是 K- 正定关联的，因为 $(0*1)*1=1*1=0\in\{0\}$，$1*1=0\in\{0\}$，而 $0*1=1\notin\{0\}$. □

定理 3.11.2(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1])　设 X 是一个 BCI- 代数，I 是 X 的一个理想，则下列命题等价：

(i)　I 是 K- 正定关联的；

(ii) $(x*y)*y \in I$ 蕴涵 $x*y \in I$;

(iii) $(x*y)*z \in I$ 蕴涵 $(x*z)*(y*z) \in I$.

证明 设 I 是正定关联的,且 $(x*y)*y \in I$. 由于 $y*y \in I$. 所以 $x*y \in I$. 于是(ii) 成立. 这就证明了(i)⇒(ii).

设(ii) 成立,且 $(x*y)*z \in I$. 由 $(x*z)*(y*z) \leqslant x*y$ 知

$$((x*z)*(y*z))*z \leqslant (x*y)*z.$$

所以 $((x*z)*(y*z))*z \in I$,即 $(((x*(y*z))*z)*z \in I$. 由(ii) 得

$$(x*z)*(y*z) = (x*(y*z))*z \in I.$$

(iii) 成立. 这就证明了(ii)⇒(iii).

设(iii) 成立,且 $(x*y)*z \in I$ 和 $y*z \in I$. 由(iii) 知 $(x*z)*(y*z) \in I$. 因此 $x*z \in I$. (i) 成立. 这就证明了(iii)⇒(i). □

这个定理是 J. Meng[8;Theorem2] 在 BCI- 代数中的推广.

定理 3.11.3(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1]) 设 X 是一个拟结合 BCI- 代数,A 是 X 的一个 K- 正定关联理想. 则对任一固定元素 $a \in X$,$A_a = \{x \in X : x*a \in A\}$ 是包含 A 和 a 的最小理想.

证明 因为 X 是拟结合的,由定理 2.3.1(iii) 知 $(0*a)*a = 0 \in A$. 而 $a*a = 0 \in A$. 所以 $0*a \in A$,即 $0 \in A_a$. 如果 $x*y \in A_a$ 和 $y \in A_a$,则 $(x*y)*a \in A$ 和 $y*a \in A$. 于是 $x*a \in A$ 即 $x \in A_a$. 这表明 A_a 是 X 的一个理想.

因为 X 是拟结合的,则对任意 $x \in A$

$$(x*a)*a \leqslant x*(a*a) = x*0 = x \in A.$$

由此得$(x*a)*a \in A$. 结合$a*a=0 \in A$,我们有$x*a \in A$,即$x \in A_a$. 这表明$A \subseteq A_a$. 显然$a \in A_a$. 因此A_a包含A和a.

设I是包含A和a的任一个理想. 对任意$x \in A_a$,则$x*a \in A$,所以$x*a \in I$. 结合$a \in I$得$x \in I$. 因此$A_a \subseteq I$. 这就证明了,A_a是包含A和a的最小理想. □

定理 3.11.4(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1])　设X是BCI-代数X的一个理想. 如果对任意$a \in X$,A_a是X的理想,则A是K-正定关联的.

证明　假设$(x*y)*z \in A$和$y*z \in A$,则$x*y \in A_z$和$y \in A_z$. 由于A_z是一个理想,我们有$x \in A_z$,这等价于$x*z \in A$. 因此A是K-正定关联的. □

由上述两个定理得

推论 3.11.5(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1])　设X是一个拟结合BCI-代数,A是X的一个理想. 则A是K-正定关联的当且仅当对任意$a \in X$, A_a是X的一个理想. □

这是J. Meng[8;Theorem 4]的一个推广.

定理 3.11.6(H. A. S. Abujabal and J. Meng[1])　设X是一个拟结合BCI-代数,A是X的一个K-正定关联理想,则A是一个闭的(*)-理想.

证明　对任意$a \in X$,由定理 3.11.3 知A_a是X的一个理想. 因为$0 \in A_a$,所以$0*a \in A$. 由定理 3.7.6,A是一个闭的(*)-理

想. □

下例说明定理 3.11.6 的逆不成立.

例 3.11.1 设 $X = \{0,1,2,3,4,5\}$,运算 $*$ 由下表定义

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	5	5	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	5	3	2	2	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个拟结合 BCI- 代数,$I = \{0,3\}$ 是一个闭($*$)-理想,但不是 K- 正定关联的. 事实上,$(4 * 3) * 3 = 1 * 3 = 3 \in I$ 而 $4 * 3 = 1 \notin I$.

推论 3.11.7 设 X 是一个拟结合 BCI- 代数,I 是 X 的一个 K- 正定关联理想,则 $L(X) \subseteq I$.

证明 由定理 3.7.2 和 3.11.6 直接可得. □

推论 3.11.8 设 X 是一个拟结合 BCI- 代数,I 是 X 的一个 K- 正定关联理想,则 $\langle X/I; *, C_0\rangle$ 是一个正定关联 BCK- 代数.

证明 由定理 3.7.11 和 3.11.6 知 X/I 是一个 BCK- 代数. 假设 $(C_x * C_y) * C_y \in \{C_0\}$,则 $C_{(x*y)*y} = I$,因此 $(x * y) * y \in I$. 由定理 3.11.2(2) 知 $x * y \in I$. 于是

$$C_x * C_y = C_{x*y} = C_0 \in \{C_0\}.$$

这就证明了$\{C_0\}$是BCK-代数X/I的一个正定关联理想. 由 J. Meng and Y. B. Jun[3] 第 2 章推论 2.7 知X/I是一个正定关联 BCK-代数. □

3.12 Nil-理想

首先回顾两个重要的记号.

对任意$n \in N^+$和BCI-代数X的元素x. 记号$0 *^n x$被归纳地定义为:

$$0 *^1 x = 0 * x,$$
$$0 *^2 x = (0 *^1 x) * x,$$
$$0 *^{n+1} x = (0 *^n x) * x.$$

而记号x^n的意义是

$$x^1 = x,\ x^2 = x * (0 * x^1),\ \cdots,\ x^{n+1} = x * (0 * x^n).$$

现在我们记

$$N_k(X) = \{x \in X : 0 *^k x = 0\},$$
$$N_k(L(X)) = N_k(X) \cap L(X)$$
$$= \{a \in L(X) : |a| \text{ 是 } k \text{ 的因数}\}.$$

引理 3.12.1　设X是一个BCI-代数,$n \in N^+$,则对任意$x \in X$,$0 *^n x = 0 * x^n$.

证明　用归纳法. $n = 1$时,$0 *^1 x = 0 * x = 0 * x^1$. 设$n = k$时,$0 *^k x = 0 * x^k$. 由定理 1.4.5(13) 有

$$0 *^{k+1} x = (0 *^k x) * x$$
$$= (0 * x^k) * x$$

$$= (0 * a_x^k) * a_x$$
$$= (0 * a_x^k) * (0 * (0 * a_x))$$
$$= 0 * (a^k * (0 * a_x))$$
$$= 0 * (a_x * (0 * a_x^k))$$
$$= 0 * a_x^{k+1}$$
$$= 0 * x^{k+1}.$$

所以 $\forall\, n \in N^+, 0 *{}^n x = 0 * x^n$. □

引理 3.12.2 对于 BCI-代数 $X, N_k(X) = \{x \in X: |x|$ 是 k 的因数$\}$.

证明 若 $|x|$ 是 k 的因数，记 $|x| = n, m = n|k$，则 $x^n \in B(X)$. 由引理 3.9.1 知

$$0 *{}^k x = 0 * x^k = 0 * a_x^k$$
$$= 0 * a_x^{nm} = 0 * (a_x^n)^m$$
$$= 0 * 0^m = 0 * 0 = 0,$$

所以 $\{x \in X: |x|$ 是 k 的因数$\} \subseteq N_k(X)$.

相反地，若 $x \in N_k(X)$，则 $0 *{}^k x = 0$. 由引理 3.12.1 知 $0 * x^k = 0$，即 $x^k \in B(X)$. 由定理 1.5.3 得 $n|k$. 于是

$$N_k(X) \subseteq \{x \in X: |x| \text{ 是 } k \text{ 的因数}\}.$$

引理得证. □

引理 3.12.3 对任意 $k \in N^+, B(X) \subseteq N_k(X)$.

证明 因为 $x \in B(X)$ 当且仅当 $|x| = 1$，而 $1|k$. □

W. P. Huang[2] 引入了 Nil-理想的概念，Y. B. Jun[1]，Y. B. Jun，J. Meng and E. H. Roh[2]，Y. B. Jun and E. H. Roh[3,4] 继

续研究了这类理想.

定义 3.12.1(W. P. Huang[2])　BCI-代数 X 的一个理想 I 叫做是一个 Nil-理想,如果 $\forall x \in I$,存在 $n \in N^+$ 使 $0 *^n x = 0$.

由引理 3.12.1,我们有

定理 3.12.4　理想 I 是一个 Nil-理想当且仅当它的每个元素是有限周期的. □

推论 3.12.5　每个 Nil-理想是一个闭理想. □

证明　由定理 3.12.4 和 3.2.7 直接可得. □

引理 3.12.6　若 $x \in N_k(X)$,则 $V(a_x) \subseteq N_k(X)$. 因此

$$N_k(X) = \bigcup \{V(a) : a \in L(X) \text{ 且 } |a| \text{ 是 } k \text{ 的因数}\}.$$

证明　由于 x 和 a_x 属于同一分支,所以 $|x| = |a_x|$. 对于任意 $y \in V(a_x)$ 恒有 $|y| = |x|$,利用引理 3.12.2 得 $x \in N_k(X)$ 蕴涵 $V(a_x) \subseteq N_k(X)$. 结合引理 3.12.2,

$$N_k(X) = \bigcup \{V(a) : a \in L(X) \text{ 且 } |a| \text{ 是 } k \text{ 的因数}\}.$$ □

定理 3.12.7(W. P. Huang[2])　对任意 $k \in N^+$,$N_k(X)$ 是 X 的一个 Nil-理想.

证明　由定理 3.1.6 和引理 3.12.6,仅需证明 $N_k(L(X))$ 是 $L(X)$ 的一个理想. 为此,设 $a * b \in N_k(L(X))$ 和 $b \in N_k(L(X))$. 则 $(a * b)^k = b^k = 0$. 于是

$$\begin{aligned} a^k &= 0 * (0 * a^k) \\ &= 0 * (b^k * a^k) \\ &= 0 * (b * a)^k \\ &= 0 * (0 * (a * b))^k \\ &= 0 * (0 * (a * b)^k) \\ &= (a * b)^k \\ &= 0, \end{aligned}$$

即 $a \in N_k(L(X))$. 显然 $0 \in N_k(L(X))$. 所以 $N_k(L(X))$ 是 X 的一个理想. □

推论 3.12.8 $N_k(X)$ 是 X 的一个闭的 p- 理想,因此它是一个强理想.

证明 由定理 3.12.7,定理 3.5.2 和推论 3.12.3 知 $N_k(X)$ 是 X 的一个 p- 理想. 由引理 3.12.6 和定理 3.5.6,$N_k(X)$ 是闭的 p- 理想. 由定理 3.6.4,$N_k(X)$ 是 X 的一个强理想. □

推论 3.12.9(Y. B. Jun[2]) $X/N_k(X)$ 是一个 p- 半单 BCI-代数.

证明 这是推论 3.12.8 和定理 3.5.10 的一个直接结果. □

定理 3.12.10 设 X 是一个 BCI- 代数,则 X 的周期部分 $P(X)$ 是 X 的最大 Nil- 理想.

证明 因为 $P(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k(X)$. □

定理 3.12.11(Y. B. Jun[2])　设 X 和 Y 是 BCI- 代数，$f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$，且 $k \in N^+$. 则

(1)　$f(N_k(X)) \subseteq N_k(f(X))$，

(2)　如果 f 是 $1-1$ 的，则 $f(N_k(X)) = N_k(f(X))$.

证明　(1)　设 $x \in N_k(X)$，则 $0 *^k x = 0$. 因此

$$0 *^k f(x) = f(0) *^k f(x) = f(0 *^k x) = f(0) = 0,$$

这表明 $f(x) \in N_k(f(x))$.

(2)　设 f 是 $1-1$ 的，且 $y \in N_k(f(X))$. 则 $0 *^k y = 0$ 且存在 $x \in X$ 使 $f(x) = y$. 于是

$$f(0 *^k x) = f(0) *^k f(x) = 0 *^k y = 0.$$

由 f 是 $1-1$ 的，得 $0 *^k x = 0$. 这表明 $x \in N_k(X)$. 所以

$$y = f(x) \in f(N_k(X)).$$

□

定理 3.12.12(Y. B. Jun[2])　设 $f \in \mathrm{Hom}(X)$. 对任意 $k \in N^+$，$N_k(X)$ 关于 f 是不变的.

证明　取 $x \in N_k(X)$，则 $0 *^k x = 0$. 由此得

$$0 *^k f(x) = f(0) *^k f(x) = f(0 *^k x) = f(0) = 0.$$

因此 $f(x) \in N_k(X)$. 这表明 $f(N_k(X)) \subseteq N_k(X)$. □

定理 3.12.13(Y. B. Jun, J. Meng and E. H. Roh[1])　设 A 和 B 分别是 BCI- 代数 X 和 Y 的 Nil- 理想，则 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 的 Nil- 理想.

证明　显然 $A \times B$ 是 $X \times Y$ 的理想. $\forall\ (x,y) \in A \times B$，记 $|x| = n$，$|y| = m$ 和 $k = \mathrm{LCM}\{n,m\}$，则

$$(0,0) *^k (x,y) = (0 *^k x, 0 *^k y)$$

$$= ((0 * {}^{n}x)^{t}, (0 * {}^{m}y)^{s})$$
$$= (0^{t}, 0^{s}) = (0,0),$$

这儿 $nt = ms = k$. 所以 $A \times B$ 是一个 Nil- 理想. □

对于 BCI- 代数 X 的一个非空子集 S，记 $N_k(S) = \{x \in S: 0 * {}^{k}x = 0\}$.

引理 3.12.14 对任意 $k \in N^{+}$，$N_k(X) \cap S = N_k(S)$.

证明 若 $x \in N_k(S)$，则 $0 * {}^{k}x = 0$ 且 $x \in S \subseteq X$. 所以 $x \in N_k(X) \cap S$. 这就证明了 $N_k(S) \subseteq N_k(X) \cap S$. 相反的包含关系是显然的. 因此 $N_k(X) \cap S = N_k(S)$. □

定理 3.12.15(Y. B. Jun, J. Meng and E. H. Roh[1]) 如果 S 是 BCI- 代数 X 的一个子代数，则 $N_k(S)$ 是 X 的一个子代数.

证明 设 $x, y \in N_k(S)$，则 $x, y \in S$，$0 * {}^{k}x = 0 * {}^{k}y = 0$. 因此 $x * y \in S$ 且

$$0 * {}^{k}(x * y) = (0 * {}^{k}x) * (0 * {}^{k}y) = 0 * 0 = 0.$$

所以 $x * y \in N_k(S)$. 即 $N_k(S)$ 是一个子代数. □

定理 3.12.16(Y. B. Jun, J. Meng and E. H. Roh[1]) 如果 A 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则 $N_k(A)$ 是 X 的一个理想.

证明 显然 $0 \in N_k(A)$. 设 $x * y \in N_k(A)$ 和 $y \in N_k(A)$，则 $x * y, y \in A$ 且 $0 * {}^{k}(x * y) = 0 * {}^{k}y = 0$. 因此 $x \in A$ 且

$$0 * {}^{k}x = (0 * {}^{k}x) * 0$$
$$= (0 * {}^{k}x) * (0 * {}^{k}y)$$

$$= 0 *^{k}(x * y) = 0,$$

这意味着 $x \in N_k(A)$. 所以 $N_k(A)$ 是 X 的一个理想. □

现在我们讨论 k-Nil 理想,这是 Nil 理想的推广.

定义 3.12.2(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　如果 A 是 BCI- 代数的一个子集,k 是一个自然数,记

$$[A;k] = \{x \in X: 0 *^{k} x \in A\},$$

称$[A;k]$ 为 A 的 k-Nil 根.

例 3.12.1　设 $X = \{0,1,2,3\}$, $*$ 表和序关系图如下

*	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0

1　2

0　3

则$\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 注意 $A = \{0,2\}$ 既不是 X 的子代数也不是 X 的理想,而

$$[A;k] = \begin{cases} X, & k \text{ 为偶数时}; \\ \{0,1\}, & k \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

定理 3.12.17(S. M. Hong and X. L. Xin[1])　设 A 是 BCI- 代数 X 的一个子集,$k \in \boldsymbol{N}$,则

$$[A;k] = \bigcup \{V(a_x): 0 *^{k} x \in A\}.$$

证明　如果 $x \in [A;k]$,则 $0 *^{k} x \in A$. 因为 $x \in V(a_x)$,所以

$$x \in \bigcup \{V(a_x): 0 *^{k} x \in A\}.$$

相反地,如果 $y \in \bigcup \{V(a_x) : 0 *^k x \in A\}$,则存在 $x \in X$ 使得

$$0 *^k x \in A, \ y \in V(a_x).$$

注意到 $0 \in \mathcal{L}(X)$,利用推论 1.3.5 我们有

$$0 * y = 0 * a_x = 0 * (0 * (0 * x)) = 0 * x.$$

由归纳法得 $0 *^k y = 0 *^k x$,因此 $y \in [A;k]$. □

推论 3.12.18 假设 A 是BCI-代数 X 的一个子集.如果 $0 \in A$,则对任意 $k \in N$, $B(X) \subseteq [A;k]$.

证明 因为 $V(0) = B(X)$ 和 $0 *^k 0 = 0 \in A$,由定理 3.12.17,$B(X) \subseteq [A;k]$. □

定理 3.12.19(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]) 假设 A 是BCI-代数 X 的一个子代数,则对任意 $k \in N$, $[A;k]$ 也是 X 的一个子代数.

证明 设 $x, y \in [A;k]$,则

$$0 *^k x \in A, \quad 0 *^k y \in A.$$

由定理 1.6.7 和 A 是子代数得

$$0 *^k (x * y) = (0 *^k x) * (0 *^k y) \in A,$$

即 $x * y \in [A;k]$.所以$[A;k]$ 是 X 的子代数. □

这个定理的结论还可以加强,见后面的推论 3.12.21.

定理 3.12.20(S. M. Hong and X. L. Xin[1]) 假设 A 是BCI-代数 X 的一个子代数,则 $x \in [A;k]$ 当且仅当 $0 * x \in [A;k]$.

证明　如果 $x \in [A;k]$，则 $0 *^k x \in A$. 由于 A 是子代数，利用定理 1.6.7 便有

$$0 *^k (0 * x) = (0 *^k 0) * (0 *^k x) = 0 * (0 *^k x) \in A,$$

即 $0 * x \in [A;k]$.

相反地，如果 $0 * x \in [A;k]$，则 $0 *^k (0 * x) \in A$. 因为 A 是 X 的子代数，所以

$$0 *^k x = 0 * [0 * (0 *^k x)] = 0 * [0 *^k (0 * x)] \in A.$$

这就是说 $x \in [A;k]$. □

推论 3.12.21(S. M. Hong and X. L. Xin[1])　假设 A 是 BCI-代数 X 的一个子代数，则对任意 $k \in N$，$[A;k]$ 是 X 的一个闭的 p-理想，即 $[A;k]$ 是 X 的一个强理想，并且 $A \subseteq [A;k]$.

证明　因为 A 是 X 的一个子代数，由定理 3.12.19 和推论 3.12.18，$[A;k]$ 是 X 的一个子代数，且 $B(X) \subseteq [A;k]$. 注意到 $L([A;k])$ 是 $L(X)$ 的一个子代数，由定理 3.2.5，$L([A;k])$ 是 $L(X)$ 的一个闭理想. 由定理 3.12.17 和定理 3.5.7，$[A;k]$ 是 X 的闭的 p-理想.

由于 A 是 X 的子代数，所以 $0 \in A$，并且对任意 $x \in A$，我们有

$$0 *^1 x = 0 * x \in A,$$

$$0 *^2 x = (0 * x) * x \in A,$$

$$\cdots\cdots$$

$$0 *^k x = (0 *^{k-1} x) * x \in A.$$

这说明 $x \in [A;k]$. 所以 $A \subseteq [A;k]$. □

注　当 A 不是子代数时，A 可能不含于 $[A;k]$. 在例 3.12.1 中，$A = \{0,2\}$，对于奇数 k，$[A;k] = \{0,1\}$，$A \nsubseteq [A;k]$.

定理 3.12.22(S. M. Hong and X. L. Xin[1]) 如果 A 是 BCI-代数 X 的一个理想,则对任意 $k \in N$,$[A;k]$ 是 X 的一个 p-理想.

证明 因为 A 是 X 的理想,则 $0 \in A$. 由推论 3.12.18,$B(X) \subseteq [A;k]$. 现在假设 $x * y \in [A;k]$ 和 $y \in [A;k]$,即

$$0 *^k (x * y) \in A, \ 0 *^k y \in A.$$

注意到$(0 *^k x) * (0 *^k y) = 0 *^k (x * y)$,我们得 $0 *^k x \in A$. 所以 $x \in [A;k]$. 这就证明了$[A;k]$ 是 X 的一个理想,结合 $B(X) \subseteq [A;k]$,知$[A;k]$ 是 X 的一个 p-理想. □

定理 3.12.23 假设 A 是 BCI-代数 X 的一个子集,$k \in N$.

(i) 如果 A 是 X 的可换理想,则$[A;k]$ 也是 X 的可换理想(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]);

(ii) 如果 A 是 X 的正定关联理想,则$[A;k]$ 也是 X 的正定关联理想(Y. B. Jun, S. M. Hong and E. H. Roh[1]);

(iii) 如果 A 是 X 的关联理想,则$[A;k]$ 也是 X 的关联理想;

(iv) 如果 A 是 X 的 K-正定关联理想,则$[A;k]$ 也是 X 的 K-正定关联理想(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]).

证明 仅给出(i) 的证明,其它可类似证明,不再赘述. 假设 A 是 X 的一个可换理想. 由定理 3.9.1,A 是 X 的理想. 再利用定理 3.12.22,$[A;k]$ 是 X 的一理想. 为了证明$[A;k]$ 是可换理想,设 $x * y \in [A;k]$,即 $0 *^k (x * y) \in A$. 由于

$$0 *^k x \in L(X), 0 *^k y \in L(X), 0 * (0 * (x * y)) = a_{x*y},$$

我们有

$$0 *^k [y * (y * x)]$$

$$= (0 *^k y) * [(0 *^k y) * (0 *^k x)]$$
$$= 0 *^k x,$$
$$0 *^k a_{x*y}$$
$$= 0 *^k (a_x * a_y)$$
$$= (0 *^k a_x) * (0 *^k y)$$
$$= (0 *^k x) * (0 *^k y),$$
$$(0 *^k x) * [(0 *^k x) * (0 *^k y)] = 0 *^k y.$$

利用这些等式,我们得到

$$0 *^k \{x * [(y * (y * x)) * (0 * (0 * (x * y)))]\}$$
$$= (0 *^k x) * \{[0 *^k (y * (y * x))] * (0 *^k a_{x*y})\}$$
$$= (0 *^k x) * \{(0 *^k x) * [(0 *^k x) * (0 *^k y)]\}$$
$$= (0 *^k x) * (0 *^k y)$$
$$= 0 *^k (x * y).$$

所以 $0 *^k \{x * [(y * (y * x)) * (0 * (x * y)))]\} \in A$,即

$$x * [(y * (y * x)) * (0 * (0 * (x * y)))] \in [A;k].$$

以上我们证明了 $x * y \in [A;k]$ 蕴涵

$$x * [(y * (y * x)) * (0 * (0 * (x * y)))] \in [A;k].$$

由定理 3.9.2,$[A;k]$ 是一个可换理想. □

定理 3.12.24(Y. B. Jun, S. M. Hong and E. H. Roh[1]) 假设 X 和 Y 是 BCI- 代数,$f:X \to Y$ 是一个同态映射.

(i) 如果 A 是 X 的一个子集,则 $f([A;k]) \subseteq [f(A);k]$;

(ii) 如果 A 是 Y 的一个子代数,则 $f^{-1}([A;k])$ 是 X 的一个子代数,且 $[f^{-1}(A);k] \subseteq f^{-1}([A;k])$;

(iii) 如果 A 是 Y 的一个理想,则 $f^{-1}([A;k])$ 是 X 的一个理想,且 $[f^{-1}(A);k] \subseteq f^{-1}([A;k])$.

证明 (i) 任取 $y \in f([A;k])$,则存在 $x \in [A;k]$ 使得

$f(x)=y$,因此

$$0*^{k}y=f(0)*^{k}f(x)=f(0*^{k}x)\in f(A),$$

即 $y\in[f(A);k]$. 这就证明了 $f([A;k])\subseteq[f(A);k]$.

(ii) 设 $x,y\in f^{-1}([A;k])$,则 $f(x),f(y)\in[A;k]$. 由定理 3.12.19

$$f(x*y)=f(x)*f(y)\in[A;k],$$

即 $x*y\in f^{-1}([A;k])$,所以 $f^{-1}([A;k])$ 是 X 的一个子代数. 现在取 $x\in[f^{-1}(A);k]$,则 $0*^{k}x\in f^{-1}(A)$. 于是

$$0*^{k}f(x)=f(0)*^{k}f(x)=f(0*^{k}x)\in A,$$

即 $f(x)\in[A;k]$, 这等价于 $x\in f^{-1}([A;k])$. 这就证明了 $[f^{-1}(A);k]\subseteq f^{-1}([A;k])$. □

引理 3.12.25(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]) 假设 A 是 BCI-代数 X 的一个子代数,$k\in N$,则 $x*y\in[A;k]$ 蕴涵 $y*x\in[A;k]$.

证明 设 $x*y\in[A;k]$,即 $0*^{k}(x*y)\in A$. 因为 A 是 X 的子代数,所以 $0*(0*^{k}(x*y))\in A$. 注意到

$$\begin{aligned}0*^{k}(y*x)&=(0*^{k}y)*(0*^{k}x)\\&=\{0*[0*(0*^{k}y)]\}*(0*^{k}x)\\&=[0*(0*^{k}x)]*[0*(0*^{k}y)]\\&=0*(0*^{k}(x*y)),\end{aligned}$$

我们有 $0*^{k}(y*x)\in A$,即 $y*x\in[A;k]$. □

由这个引理,$x*y\in[A;k]$ 等价于 $x*y\in[A;k]$ 和 $y*x\in[A;k]$. 现在定义:对于 $x,y\in X$,$x\sim y$ 当且仅当 $x*y\in[A;k]$. 由引理 3.12.25 知,$x\sim y$ 当且仅当 $x\sim y(\mathrm{mod}[A;k])$. 由推论 3.12.21 得

定理 3.12.26(S. M. Hong, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　假设 A 是BCI-代数 X 的一个子代数, $k\in \boldsymbol{N}$, 则 $\langle X/[A;k];*,C_0\rangle$ 是一个 p-半单 BCI-代数, 且 $C_0=[A;k]$. □

定理 3.12.27(Y. B. Jun, S. M. Hong and E. H. Roh[1])　假设 X 和 Y 是 BCI-代数, A 和 B 分别是 X 和 Y 的子集, $k\in \boldsymbol{N}$ 则

(i)　$[A;k]\times[B;k]=[A\times B;k]$;

(ii)　如果 A 和 B 分别是 X 和 Y 的闭理想, 则

$$X/[A;k]\times Y/[B;k]\cong(X\times Y)/[A\times B;k].$$

证明　(i) 的证明如下:

$$\begin{aligned}[A\times B;k]&=\{(x,y)\in X\times Y:(0,0)*^k(x,y)\in A\times B\}\\&=\{(x,y)\in X\times Y:(0*^kx,0*^ky)\in A\times B\}\\&=\{(x,y)\in X\times Y:0*^kx\in A,0*^ky\in B\}\\&=\{x\in X:0*^kx\in A\}\times\{y\in Y:0*^ky\in B\}\\&=[A;k]\times[B;k].\end{aligned}$$

(ii)　显然 $[A;k]\times[B;k]$ 是 $X\times Y$ 的理想. 考察自然同态

$$\pi_X:X\to X/[A;k],\ x\mapsto C_x;$$
$$\pi_Y:Y\to Y/[B;k],\ y\mapsto C_y.$$

定义映射 $f:X\times Y\to X/[A;k]\times Y/[B;k]$ 使得 $f(x,y)=(C_x,C_y)$.

容易看出 f 是一个良定的满同态. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f&=\{(x,y)\in X\times Y:f(x,y)=([A;k],[B;k])\}\\&=\{(x,y)\in X\times Y:(C_x,C_y)=([A;k],[B;k])\}\\&=\{(x,y)\in X\times Y:C_x=[A;k],C_y=[B;k]\}\\&=\{(x,y)\in X\times Y:0*^kx\in A,0*^ky\in B\}\\&=\{x\in X:0*^kx\in A\}\times\{y\in Y:0*^ky\in B\}\end{aligned}$$

$$= [A;k] \times [B;k],$$

由同态基本定理,我们有

$$(X \times Y)/[A \times B;k] \cong X/[A;k] \times Y/[B;k]. \qquad \square$$

3.13 结合理想

张小红和凌瑞官[1]引入了结合理想的概念. C. S. Hoo[4]也独立地引入了这一概念,不过他称这类理想为强关联理想(strong implicative ideal). 不同的名称反映了不同的想法. 本节介绍上述两文结果.

定义 3.13.1 BCI-代数 X 的一个非空子集 I 叫做一个结合理想,如果它满足(i) $0 \in I$, (ii) 对任意 $x,y,z \in X$, $(x*y)*z \in I$ 和 $y*z \in I$ 蕴涵 $x \in I$.

定理 3.13.1 结合理想必是理想.

证明 在(ii)中取 $z = 0$ 即得. $\square$

定理 3.13.2 设 I 是 BCI-代数 X 的一个理想. 则下列条件等价:

(i) I 是 X 的结合理想;

(ii) $(x*y)*z \in I$ 蕴涵 $x*(y*z) \in I, \forall x,y,z \in X$;

(iii) $x*(0*x) \in I, \forall x \in X$;

(iv) $\langle X/I;*,I\rangle$ 是一个结合 BCI-代数.

证明 (i)⇒(ii) 设 I 是 X 的结合理想,且 $(x*y)*z \in I$.

因为

$$((x*(y*z))*(x*y))*z$$
$$=(((x*(x*y))*(y*z))*z$$
$$\leqslant (y*(y*z))*z=0\in I,$$

所以 $((x*(y*z))*(x*y))*z\in I$. 结合 $(x*y)*z\in I$ 得 $x*(y*z)\in I$. (ii) 成立.

(ii)⇒(iii)　设(ii)成立. 因此 $(x*0)*x=x*x=0\in I$, 由 (ii) 知 $x*(0*x)\in I$. (iii) 成立.

(iii)⇒(iv)　设对任意 $x\in X$ 有 $x*(0*x)\in I$. 如果 $0*x\in I$, 则显然 $x\in I$. 另一方面,

如果 $x\in I$, 由 $0*(0*x)\leqslant x$ 知 $0*(0*x)\in I$. 因此 $0*x\in I$. 这表明满足条件(iii)的理想是闭的. 因此在商代数 X/I 中, $C_0=I$. 现在证明商代数 X/I 是结合的. 对任意 $x\in X$, 由 $x*(0*x)\in I$ 得 $C_x*(C_0*C_x)=C_0$, 即 $C_x\leqslant C_0*C_x$. 另外 $x*(0*x)\in I$ 蕴涵

$$(0*x)*x=(0*(0*(0*x)))*x$$
$$=(0*x)*(0*(0*x))$$
$$=0*(x*(0*x))\in I,$$

所以 $C_0*C_x\leqslant C_x$. 综上所述 $C_x=C_0*C_x$. 这表明 X/I 是结合的. (iv) 成立.

(iv)⇒(i)　若 X/I 是结合的, 且 $(x*y)*z\in I$ 和 $y*z\in I$, 则 $(C_x*C_y)*C_z=C_0$. 由结合性知 $C_x*(C_y*C_z)=C_0$, 即 $x*(y*z)\in I$. 结合 $y*z\in I$ 得 $x\in I$. 而 $0\in I$ 是显然的. 所以 I 是一个结合理想. (i) 成立. □

在上述证明中,我们已得到下列结论.

定理 3.13.3　每个结合理想是闭的. □

定理 3.13.4 设 I 是 X 的一个结合理想. 则 $\forall\ x \in X, x \in I$ 当且仅当 $0 * x \in I$. □

现在讨论结合理想与其它理想的关系.

定理 3.13.5 结合理想 I 必是 p- 理想.

证明 若 $x \in B(X)$, 则 $0 * x = 0 \in I$. 由定理 3.13.4, $x \in I$. 所以 $B(X) \subseteq I$. 由定理 3.5.2, I 是一个 p- 理想. □

推论 3.13.6 结合理想是一个强理想.

证明 由定理 3.6.4, 定理 3.13.3 和 3.13.5 可得. □

在例 3.3.1 中 $I = \{2^n : n \in \mathbf{Z}\}$ 是 X 的一个闭理想. 因为 X 是 p- 半单的, 所以 I 还是一个强理想. 但 I 不是结合理想, 因为

$$3 \div (1 \div 3) = 6 \overline{\in} I.$$

所以推论 3.13.6 的逆不成立.

定理 3.13.7 一个 BCI- 代数 X 是结合的当且仅当它的每个理想是结合的.

证明 设 X 是一个结合 BCI- 代数, I 是 X 的任一理想. 由结合性知, $\forall\ x \in X$,

$$x * (0 * x) = (x * 0) * x = 0 \in I.$$

利用定理 3.13.2 得 I 是一个结合理想.

相反地, 若 X 的每个理想是结合的, 则对任意 $x \in X$,

$x*(0*x)\in\{0\}$，即 $x*(0*x)=0$，这等价于 $x\leqslant 0*x$. 注意到 $0*x\in L(X)$，所以 $x=0*x$. 于是 X 是一个结合 BCI- 代数. □

定理 3.13.8　若 I 是 BCI- 代数 X 的一个结合理想，A 是包含 I 的任一个理想，则 A 也是结合的.

证明　由 I 是结合的知，对任意 $x\in X$ 有 $x*(0*x)\in I$. 因为 $I\subseteq A$，所以 $x*(0*x)\in A$. 由定理 3.13.2，A 是一个结合理想. □

作为上述两个定理的直接结果有

推论 3.13.9　一个 BCI- 代数是结合的当且仅当它的零理想是结合的. □

最后，我们给出结合理想的另外两个等价条件.

定理 3.13.10　假设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则下列条件等价：

(i)　I 是一个结合理想；

(ii)　$(x*z)*(0*y)\in I$ 蕴涵 $y*(x*z)\in I$；

(iii)　$x*(0*y)\in I$ 蕴涵 $y*x\in I$.

证明　(i)⇒(ii)　假设 $S=(x*z)*(0*y)\in I$. 因为

$$\begin{aligned}[(x*z)*s]*(0*y)&=[(x*z)*(0*y)]*s\\&=0\in I,\end{aligned}$$

由定义得 $y*(x*z)\in I$.

(ii)⇒(iii)　在(ii)中取 $z=0$ 便得(iii).

(iii)⇒(i) 假设$(x*z)*(0*y)\in I$和$z\in I$. 因为I是理想,得$x*(0*y)\in I$. 由(iii),我们有$y*x\in I$. 这表明I是一个结合理想. □

1991年,Z. S. Tan[1]引入并研究了正规理想的概念. 随后,朱怡权[2]进一步研究了这类理想. 这类理想的实质是什么?我们将看到正规理想是p-半单BCI-代数中的结合理想.

定义 3.13.2(Z. S. Tan[1]) BCI-代数X的一个理想I叫做正规的,如果对任意$x\in X$,$x*I=I*x$.

定理 3.13.11 若I是BCI-代数X的任一个正规理想,则$I\subseteq L(X)$.

证明 由定义3.13.2,我们有

$$I=I*0=0*I\subseteq L(X).$$ □

定理 3.13.12 假设BCI-代数X存在一个正规理想I,则$X=L(X)$,即X是一个p-半单BCI-代数.

证明 对任意$x\in X$,因为

$$x=x*0\in x*I=I*x\subseteq L(X),$$

所以$X\subseteq L(X)$. 相反的包含关系是平凡的. 这就证明了$X=L(X)$. □

这个定理说明,如果一个BCI-代数不是p-半单的,则它不包含任何正规理想. 因此,我们下面的讨论仅限于p-半单BCI-代数.

定理 3.13.13　假设 X 是一个 p-半 BCI-代数，I 是 X 的一个结合理想，则对任意 $x \in X$

(i)　$x * I = C_x^I$；

(ii)　$x * I = I * (0 * x)$.

证明　假设 $y \in x * I$，则有 $z \in I$ 使得 $y = x * z$. 因结合理想是闭的，我们有 $0 * z \in I$. 于是

$$y * x = (x * z) * x = 0 * z \in I.$$

利用 X 的 p-半单性，$x = 0 * (0 * x)$. 所以

$$\begin{aligned} x * y &= [0 * (0 * x)] * y \\ &= (0 * y) * (0 * x) \\ &= 0 * (y * x) \in I \end{aligned}$$

这就证明了 $x \sim y(\mathrm{mod} I)$，因此 $y \in C_x^I$.

相反地，假设 $y \in C_x^I$，则 $x * y \in I$. 令 $z = x * y$ 便有

$$y = x * (x * y) = x * z \in x * I.$$

综合所述，已证 $x * I = C_x^I$. (ii) 成立.

任取 $y \in x * I$，则有 $z \in I$ 满足

$$y = x * z = [0 * (0 * x)] * z = (0 * z) * (0 * x).$$

因为 $0 * z \in I$，所以 $y \in I * (0 * x)$. 相反地，设 $y \in I * (0 * x)$，则有 $z \in I$ 使得

$$\begin{aligned} y &= z * (0 * x) \\ &= [0 * (0 * z)] * (0 * x) \\ &= [0 * (0 * x)] * (0 * z) \\ &= x * (0 * z). \end{aligned}$$

结合 $0 * z \in I$，我们有 $y \in x * I$. 综上所述已证 $x * I = I * (0 * x)$. (ii) 成立.　□

定理 3.13.14(朱怡权[2]) 设 X 是一个 p-半单 BCI-代数，则 X 的一个理想 I 是结合的当且仅当 I 是正规的.

证明 假设 I 是结合理想，由定理 3.13.2(iv)，X/I 是一个结合 BCI-代数，所以对任意 $x \in X, C_x^I = C_{0*x}^I$. 利用引理 3.13.13(ii)，我们有

$$
\begin{aligned}
x * I &= C_x^I \\
&= C_{0*x}^I \\
&= (0 * x) * I \\
&= I * (0 * (0 * x)) \\
&= I * x,
\end{aligned}
$$

于是 I 是正规理想.

相反地，假设 I 是正规理想，则对任意 $x \in X, x * I = I * x$. 于是

$$x = x * 0 \in x * I = I * x.$$

故有 $y \in I$ 使得 $x = y * x$. 因为

$$
\begin{aligned}
&[x * (0 * x)] * y \\
&= [(y * x) * (0 * x)] * y \\
&= (0 * x) * (0 * x) \\
&= 0 \in I,
\end{aligned}
$$

所以 $x * (0 * x) \in I$. 由定理 3.13.2，I 是一个结合理想. □

定理 3.13.15(朱怡权[2]) 假设 X 是一个 p-半单 BCI-代数，I 是 X 的一个结合理想，则对任意 $x \in X, |C_x^I| = |I|$，这儿 $|A|$ 表示 A 的基数.

证明 令 $f: I \to C_x^I$ 使得对任意 $y \in I$ 有 $f(y) = x * y$. 由定理 3.13.3(i)，f 是到 C_x^I 的满射. 如果 $y, z \in I$ 且 $f(y) = f(z)$，则

$x * y = x * z$. 由定理 2.2.3(vii) 得 $y = z$,因此 f 还是一个单射. 所以 $|I| = |C_x^I|$. □

定理 3.13.16(Z. S. Tan[1])　假设 X 是有限 p-半单 BCI-代数,A 和 B 是 X 的结合理想,$A \subseteq B$. 则

(i)　$|X| = |a| \cdot |X/A|$;

(ii)　$|X/A| = |B/A| \cdot |X/B|$.

证明　这是群论中 Lagrange 定理的推论. □

C. S. Hoo[4] 还引入了弱关联理想的概念,但是 Y. L. Lin[2] 证明了这一概念等价于理想,因此它并不是一个新概念.

定义 3.13.3(C. S. Hoo[4])　BCI-代数 X 的一个理想 I 叫做 X 的*弱关联理想*,如果对任意 $x,y,z \in X$,

$$(x * y) * z \in I \text{ 和 } y * z \in I \text{ 蕴涵} (x * z) * z \in I.$$

定理 3.13.13(Y. L. Liu[2])　BCI-代数 X 的任何理想 I 都是弱关联的.

证明　因为由定理 1.1.2(iv),我们有

$$\begin{aligned}[(x * z) * z] * (y * z) &\leqslant (x * z) * y \\ &= (x * y) * z.\end{aligned}$$

如果 $(x * y) * z \in I$ 和 $y * z \in I$,则 $(x * z) * z) \in I$. 所以 I 是弱关联的. □

由定义 3.13.3 知每个弱关联理想必是理想,所以弱关联理想和理想这两个概念是相同的.

3.14 拟结合理想

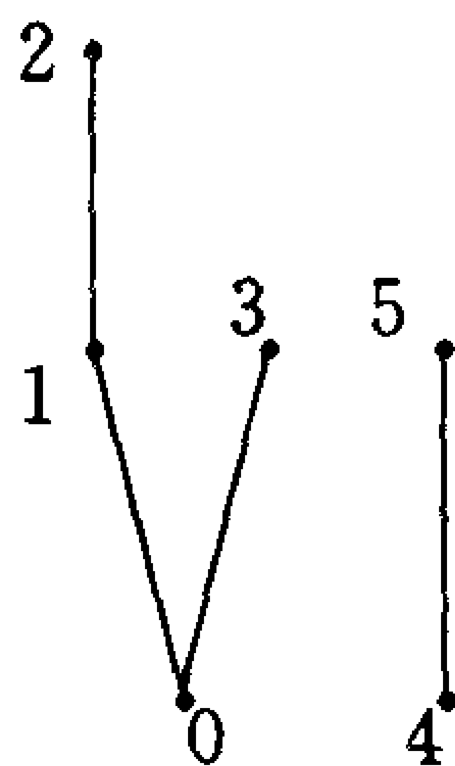
为了进一步研究拟结合 BCI- 代数的性质,刘用麟等引入并研究了拟结合理想. 本节介绍的结果包含在刘用麟,张小红,岳振才[1]和 Y. L. Liu, J. Meng, X. H. Zhang and Z. C. Yue[1]中.

定义 3.14.1 设 X 是一个 BCI- 代数,I 是 X 的一个非空子集. 我们称 I 是一个拟结合理想,如果它满足(i) $0 \in I$ 和

(ii) $x*(y*z) \in I$ 和 $y \in I$ 蕴涵 $x*z \in I$.

例 3.14.1 设 $X = \{0,1,2,3,4,5\}$, $*$ 表和序关系图如下:

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	2	0	2	5	4
3	3	3	3	0	4	4
5	5	5	4	5	2	0



则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,$I = \{0,1,2,3\}$ 是 X 的一个拟结合理想.

定理 3.14.3 X 的任一拟结合理想既是 X 的一个理想又是 X 的一个子代数. 所以拟结合理想必是闭理想.

证明 假设 I 是 X 的一个拟结合理想. 在定义 3.14.1(ii) 中,取 $z = 0$ 得 $x*y \in I$ 和 $y \in I$ 蕴涵 $x \in I$. 因此 I 是 X 的一个理

想. 在定义 3.14.1(ii) 中,令 $y=z$ 则得 $x\in I$ 和 $y\in I$ 蕴涵 $x*y\in I$,所以 I 是 X 的一个子代数.

定理的后半部分由下例说明.

例 3.14.2　设 $X=\{0,1,2,3\}$, $*$ 表如下:

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

容易验证 $I=\{0\}$ 既是 X 的一个理想也是一个子代数,但不是拟结合理想. 事实上,

$$3*(0*1)=3*3=0\in\{0\},3*1=2\notin\{0\}.\qquad\square$$

定理 3.14.4　设 I 是 BCI-代数 X 中的一个理想,则下列条件等价:

(i)　I 是一个拟结合理想;

(ii)　$x*(0*y)\in I$ 蕴涵 $x*y\in I$;

(iii)　$x*(y*z)\in I$ 蕴涵 $(x*y)*z\in I$.

证明　(i)⇒(ii) 是显然的.

(ii)⇒(iii)　设 $x*(y*z)\in I$. 因为

$$\begin{aligned}&((x*y)*(0*z))*(x*(y*z))\\=&((x*y)*(x*(y*z)))*(0*z)\\\leqslant&((y*z)*y)*(0*z)\\=&(0*z)*(0*z)\\=&0\in I,\end{aligned}$$

因此 $(x*y)*(0*z)\in I$. 由 (ii) 得 $(x*y)*z\in I$.

(iii)⇒(i)　假设 $x*(y*z)\in I$ 和 $y\in I$. 由 (iii) 我们得

$(x*y)*z\in I$，即$(x*z)*y\in I$. 因I是理想，所以$x*z\in I$. (i)成立. □

拟结合理想有下述扩张性质.

定理 3.14.5 设A和I是X的两个理想，且$I\subseteq A$. 如果I是一个拟结合理想，则A也是一个拟结合理想.

证明 假设I是一个拟结合理想. 为了证明A是拟结合的，仅需证明$x*(0*y)\in A$蕴涵$x*y\in A$. 设$s=x*(0*y)\in A$，则

$$(x*s)*(0*y)=(x*(0*y))*s=0\in I.$$

由定理 3.14.4(ii) 得$(x*s)*y\in I$. 由于$I\subseteq A$，所以

$$(x*y)*s=(x*s)*y\in A.$$

结合$s\in A$得$x*y\in A$. 这表明A是一个拟结合理想. □

推论 3.14.6 如果BCI-代数X的零理想$\{0\}$是拟结合的，则X的每个理想是拟结合的. □

定理 3.14.7 假设I是BCI-代数的一个理想. 如果对任意$x\in I$和$y\in X$恒有$x*y\in I$，则I是一个拟结合理想.

证明 假设$x*(y*z)\in I$和$y\in I$. 则

$$[x*(y*z)]*z\in \text{和 } y*z\in I,$$

即

$$(x*z)*(y*z)\in I \text{ 和 } y*z\in I.$$

所以$x*z\in I$. 这就证明了I是一个拟结合理想. □

定理 3.14.8 结合理想必是拟结合理想.

证明　假设 I 是 BCI- 代数 X 的一个结合理想，由定理 3.13.1 知 I 也是一个理想. 现在任取 $x*(0*y)\in I$. 因为

$$
\begin{aligned}
&\{0*[0*(y*(0*x))]\}*[x*(0*y)]\\
&=\{[0*(0*y)]*[0*(0*(0*x))]\}*[x*(0*y)]\\
&\leqslant [x*(0*y)]*[x*(0*y)]\\
&=0\in I,
\end{aligned}
$$

所以 $0*\{0*[y*(0*x)]\}\in I$. 由定理 3.13.5 知 I 也是一个 p-理想，利用推论 3.5.9 有 $y*(0*x)\in I$. 由定理 3.13.10，我们得到 $x*y\in I$. 所以 I 是一个拟结合理想. □

定理 3.14.9　BCI- 代数 X 的一个非空子集 I 是一个结合理想当且仅当 I 既是一个 p- 理想又是一个拟结合理想.

证明　假设 I 既是一个 p- 理想又是一个拟结合理想，则 I 是一个闭理想. 如果 $x*(0*y)\in I$，由定理 3.14.4(ii) 得 $x*y\in I$. 因为

$$
\begin{aligned}
&[0*(y*x)]*(x*y)\\
&=[(0*y)*(0*x)]*(x*y)\\
&\leqslant (x*y)*(x*y)\\
&=0\in I,
\end{aligned}
$$

所以 $0*(y*x)\in I$. 由 I 是闭的知 $0*(0*(y*x))\in I$. 注意 I 是 p- 理想，由定理 3.5.8 得 $y*x\in I$. 这表明 I 是一个拟结合理想.

相反的蕴涵关系由定理 3.13.5 和 3.14.8 得到. □

现在我们给出拟结合 BCI- 代数的理想刻画.

定理 3.14.10　假设 I 是 BCI- 代数 X 的一个理想，则 I 是拟

结合的当且仅当商代数$\langle X/I; *, C_0\rangle$是一个拟结合 BCI- 代数.

证明 设I是拟结合的. 因为$(0*x)*(0*x)=0\in I$,由定理 3.14.4(ii) 得

$$[(0*x)*x]*0=(0*x)*x\in I.$$

利用拟结合理想的闭性得

$$0*[(0*x)*x]=[0*(0*x)]*(0*x)\in I.$$

因此$C_{(0*x)*x}=C_0$,即$(C_0*C_x)*C_x=C_0$. 于是$C_0*C_x\leqslant C_x$,这说明X/I是一个拟结合 BCI- 代数. □

定理 3.14.11 设X是一个 BCI- 代数,则下列条件等价:

(i) X是拟结合 BCI- 代数;

(ii) X的每个理想是一个拟结合理想;

(iii) X的零理想是一个拟结合理想;

(iv) 每个商代数X/I是一个拟结合 BCI- 代数;

(v) $X/B(X)$是一个拟结合 BCI- 代数;

(vi) $X/B(X)$是一个结合 BCI- 代数;

(vii) $B(X)$是一个结合理想;

(viii) $B(X)$是一个拟结合理想;

(ix) 若理想$A\subseteq B(X)$,则A是拟结合理想.

证明 (i)⇒(ii) 假设$x*(y*z)\in I$和$y\in I$. 由X是拟结合 BCI- 代数知$(x*y)*z\leqslant x*(y*z)$,所以

$$(x*z)*y=(x*y)*z\in I.$$

由此推得$x*z\in I$. 这就证明了I是一个拟结合理想.

(ii)⇒(iii) 平凡的.

(iii)⇒(iv) 见定理 3.14.10.

(iv)⇒(v) 明显的.

(v)⇒(vi)　因为 $X/B(X)$ 是一个 p- 半单的拟结合 BCI- 代数,因此 $X/B(X)$ 是结合 BCI- 代数.

(vi)⇒(vii)　见定理 3.13.2.

(vii)⇒(viii)　见定理 3.14.8.

(viii)⇒(i)　假设 $B(X)$ 是 X 的一个拟结合理想,由定理 3.14.10,$X/B(X)$ 是一个拟结合 BCI- 代数.于是我们有

$$C_{0*x}=C_0*C_x=C_0*(C_0*C_x)=C_{0*(0*x)}.$$

所以

$$(0*x)*[0*(0*x)]\in B(X),$$
$$[0*(0*x)]*(0*x)\in B(X).$$

注意到总有

$$(0*x)*[0*(0*x)]\in L(X),$$
$$[0*(0*x)]*(0*x)\in L(X),$$

而 $B(X)\cap L(X)=\{0\}$,我们有

$$(0*x)*[0*(0*x)]=[0*(0*x)]*(0*x)=0,$$

这说明 $0*x=0*(0*x)$,即 X 是拟结合的.

(ii)⇒(ix)　明显的.

(ix)⇒(viii)　由定理 3.14.5.　□

3.15　换位子理想及可解 BCI- 代数

受到可解群的启发,Y. Q. Zhu[1] 在 BCI- 代数中引入并研究了换位子理想,借此讨论了可解 BCI- 代数.

定义 3.15.1(Y. Q. Zhu[1])　设 X 是一个 BCI- 代数.对任意 $x,y\in X$,元素 $(x*y)*(y*x)$ 叫做 X 的一个换位子,并记为 (x,y). X 的所有换位子的集记为 X_c.

例 3.15.1 设 $X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表如下

$*$	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，$X_c = \{0,2\}$.

借助于换位子可以刻画 p- 半单性. 下述定理也说明了换位子这一名称的来源.

定理 3.15.1 BCI- 代数 X 是 p- 半单的当且仅当对任意 $a,b \in X$，(a,b) 是方程 $(a*b)*x = b*a$ 的唯一解.

证明 必要性 假设 X 是 p- 半单的，由定理 2.2.6，$\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 群，这儿 $x+y = x*(0*y)$，$x*y = x-y$. 因此对任意 $a,b \in X$

$$
\begin{aligned}
&(a*b)*x = b*a \\
\Leftrightarrow &(a-b)-x = b-a \\
\Leftrightarrow &x = (a-b)-(b-a) \\
\Leftrightarrow &x = (a*b)*(b*a) = (a,b).
\end{aligned}
$$

这就证明了 (a,b) 是方程 $(a*b)*x = b*a$ 的唯一解.

充分性 设对任意 $a,b \in X$，我们有

$$(a*b)*(a,b) = b*a.$$

取 $a = 0$ 和 $b \in B(X)$，因为 $0*b = 0$ 和 $(0,b) = (0*b)*(b*0) = 0$，我们得

$$b = b*0 = (0*b)*(0,b) = 0*0 = 0.$$

所以 $B(X)=\{0\}$,即 X 是 p- 半单的. □

记$C(X)=(X_c]$. 称$C(X)$为X的**换位子理想**. 在例3.15.1中 $C(X)=\{0,2\}$.

定理 3.15.2(Y.Q.Zhu[1]) 设 X 是一个 BCI- 代数,则 $B(X)\subseteq C(X)$. 如果 X 是一个 BCK- 代数,则 $C(X)=X$.

证明 对任意 $x\in B(X)$, $0*x=0$. 所以

$$x=(x*0)*(0*x)\in X_c.$$

由此得 $B(X)\subseteq X_c\subseteq C(X)$. 当 X 是BCK- 代数时, $B(X)=X$,所以 $C(X)=X$. □

定理 3.15.3(Y.Q.Zhu[1]) 设 X 是一个 p- 半单 BCI- 代数,则

$$\begin{aligned}C(X)&=\{(x*y)*(y*x):x,y\in X\}\\&=\{x^2:x\in X\},\end{aligned}$$

即 $C(X)$ 恰好是所有换位子的集.

证明 因为 X 是 p- 半单的,所以由定理 2.2.2(viii)

$$\begin{aligned}(x*y)*(y*x)&=(x*y)*[0*(x*y)]\\&=(x*y)^2.\end{aligned}$$

这表明 $X_c\subseteq\{x^2:x\in X\}$,相反的包含是显然的,于是 $X_c=\{x^2:x\in X\}$.

现在证明 X_c 是 X 的一个理想. 取 $u*v\in X_c$ 和 $v\in X_c$. 由上段结论,可设 $v=x^2$ 和 $u*v=z^2$,则

$$\begin{aligned}u&=(u-v)+v\\&=(u*v)+v\end{aligned}$$

$$= z^2 * (0 * x^2)$$
$$= z^2 * (0 * x)^2 \qquad [由定理 1.4.5(iv)]$$
$$= [z * (0 * x)]^2 \in X_c, \qquad [由定理 1.4.5(iii)]$$

所以 X_c 是 X 的一个理想. 因此 $X_c = C(X)$. □

定理 3.15.4 包含 $C(X)$ 的每个理想是闭的.

证明 设 I 是BCI-代数 X 的任一理想, 且 $C(X) \subseteq I$. 为了证明 I 是闭的, 任取 $y \in I$. 因为

$$(0 * y) * y = (0 * y) * (y * 0) \subseteq C(X) \subseteq I,$$

所以 $0 * y \in I$. 这说明 I 是闭的. □

命题 3.15.5 假设 S 是BCI-代数 X 的一个子代数, 则 $C(S)$ 是 $C(X)$ 的一个子代数.

证明 平凡的. □

定理 3.15.6 设 I 是BCI-代数 X 的一个理想, 则 X/I 是结合BCI-代数当且仅当 $C(X) \subseteq I$. 特别地, $X/C(X)$ 是结合的.

证明 对任意 $x, y \in X$,

$$C_x * C_y = C_y * C_x$$
$$\Leftrightarrow C_{x*y} = C_{y*x}$$
$$\Leftrightarrow (x * y) * (y * x) \in I \text{ 和 } (y * x) * (x * y) \in I$$
$$\Leftrightarrow (x, y) \in I \text{ 和 } (y, x) \in I$$
$$\Leftrightarrow X_C \subseteq I$$
$$\Leftrightarrow C(X) \subseteq I$$

所以 X/I 是结合的当且仅当 $C(X) \subseteq I$. □

由命题 3.15.6,我们可以归纳地定义

$$C^1(X) = C(X),\ C^{n+1}(X) = C(C^n(X)),\ n = 1,2,\cdots.$$

类似于可解群,下面引入可解 BCI- 代数的概念.

定义 3.15.2　BCI- 代数 X 叫做可解的,如果对某个自然数 n 有 $C^n(X) = \{0\}$.

显然,任何结合 BCI- 代数是可解的;例 3.15.1 中的 BCI- 代数是可解的;一个 BCK- 代数 X 是可解的当且仅当 $X = \{0\}$.

定理 3.15.7(Y. Q. Zhu[1])　BCI- 代数 X 是可解的当且仅当 X 是 p- 半单的,并且存在自然数 n 使得对所有 $x \in X$ 有 $x^{2^n} = 0$.

证明　假设 X 是可解的,则对某个自然数 n 有 $C^n(X) = \{0\}$. 由定理 3.15.2,$B(X) \subseteq C^1(X)$,由此得

$$B(X) = C(B(X)) \subseteq C(C(X)) = C^2(X).$$

归纳地,我们有:对任意自然数 k,$B(X) \subseteq C^k(X)$. 因此 $B(X) = \{0\}$,即 X 是 p- 半单的. 现在我们证明

$$B(X) = C(B(X)) \subseteq C(C(X)) = C^2(X).$$

归纳地,我们有:对任意自然数 k,$B(X) \subseteq C^k(X)$. 因此 $B(X) = \{0\}$,即 X 是 p- 半单的. 现在我们证明

(1)　$C^k(X) = \{x^{2^k} : x \in X\},\ k = 1,2,\cdots.$

由定理 3.15.3,$k = 1$ 时(1) 成立. 假设对自然数 k,(1) 式成立,并注意到 $C^k(X)$ 仍是 p- 半单 BCI- 代数,对 $C^k(X)$ 应用定理 3.15.3,我们有

$$C^{k+1}(X) = C(C^k(X))$$

$$= \{(x^{2^k})^2 : x \in X\}$$
$$= \{x^{2\cdot 2^k} : x \in X\} \qquad [由定理 1.4.5(ii)]$$
$$= \{x^{2^{k+1}} : x \in X\}.$$

所以(1)成立,必要性得证.

充分性是显然的. □

定义 3.15.3 一个群 G 叫做一个 q- 群,如果 G 的每个元素 x 的阶(或周期)是固定素数 q 的幂.

现在,用群论的语言,定理 3.15.7 能够表述为

定理 3.15.8 假设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个可解 BCI- 代数,则 $\langle X; +, 0\rangle$ 是一个 Abel 2- 群,且 $\{|x| : x \in X\}$ 是有限的,这儿 $x + y = x * (0 * y)$.

相反地,假设 $\langle X; +, 0\rangle$ 是 Abel 2- 群,且 $\{|x| : x \in X\}$ 是有限的,则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个可解 BCI- 代数,这儿 $x * y = x - y$. □

3.16 固执理想

固执(obstinate)理想的概念,是 S.K.Goel and A.K. Arora[1] 讨论下述问题时引入的:对于 BCK- 代数 X 和 Y,如果 I 是 X 的一个理想,那么存在同态 $f: X \to Y$ 使得 $\mathrm{Ker}(f) = A$?自然,在 BCI- 代数中也可以讨论同样的问题.

定义 3.16.1(S.K.Goel and A.K.Arora[1]) BCI- 代数 X 的一个真理想 I 叫做固执的,如果 $x, y \in X - I$ 蕴涵 $x * y \in I$.

例 3.16.1　设 $X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表如下

$*$	0	1	2	3
0	0	0	0	3
1	1	0	0	3
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数，$I_1 = \{0,1,2\}$ 是 X 的一个固执理想；$I_2 = \{0,1\}$ 不是 X 的固执理想，事实上，$2, 3 \in X - I_2$，但是 $2 * 3 = 3 * 2 = 3 \notin I_2$.

定理 3.16.1(S. M. Wei, Y, B. Jun and E. H. Roh[1])　假设 I 是 BCI- 代数 X 的一个固执理想，则 I 是一个闭理想，因此 I 是一个子代数.

证明　用反证法. 假设存在 $x \in I$ 使得 $0 * x \notin I$. 由理想的定义，$(0 * x) * x \notin I$. 但是由 I 是固执的，得

$$0 * x = [(0 * x) * x] * (0 * x) \in I,$$

这与 $0 * x \notin I$ 矛盾. 所以不存在 $x \in I$ 而 $0 * x \notin I$，即 I 是一个闭理想. □

定理 3.16.2(S. M. Wei, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　假设 I 是 BCI- 代数的一个固执理想. 则

(i)　$L(X) = L(I)$ 当且仅当 $B(X) \cap I \neq B(X)$；

(ii)　$L(X) \neq L(I)$ 当且仅当 $B(X) \cap I = B(X)$.

证明　因为 (i) 和 (ii) 是等价的，所以仅给出 (i) 的证明. 假设 $L(X) = L(I)$，来证 $B(X) \cap I \neq B(X)$. 用反证法. 如果 $B(X) \cap I = B(X)$，即 $B(X) \subseteq I$，则由定理 3.5.2，I 是一个 p- 理想. 利用

定理 3.5.7,我们有

$$\begin{aligned} I &= \bigcup \{V(a): a \in L(I)\} \\ &= \bigcup \{V(a): a \in L(X)\} \\ &= X, \end{aligned}$$

这与 I 是固执理想矛盾. 所以 $B(X) \cap I \neq B(X)$.

相反地,假设 $B(X) \cap I \neq B(X)$,来证 $L(X) = L(I)$. 事实上,如果 $L(X) \neq L(I)$,则 $\exists\, a \in L(X) - L(I)$. 任取 $x \in B(X) - I$,由于 I 是一个固执理想,我们有

$$a = a * 0 = a * x \in I,$$

因此 $a \in L(I)$,这与 $a \notin L(I)$ 矛盾. 所以 $L(X) = L(I)$. □

定理 3.16.3(S. M. Wei, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]) 假设 I 是 BCI-代数 X 的一个固执理想. 则

(i) 如果 $B(X) \subseteq I$,那末 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想,并且 $x \in I$ 和 $y \in X - I$ 蕴涵 $x * y \in X - I$;

(ii) 如果 $L(X) = L(I)$,那末 $B(X) \cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想,并且 $x \in I$ 和 $y \in X - I$ 蕴涵 $x * y \in I$.

证明 (i) 如果 $B(X) \subseteq I$,由定理 3.16.2(ii),我们有 $L(X) \neq L(I)$. 此时 I 是一个 p-理想,并且 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个理想. 当 $a, b \in L(X) - L(I)$ 时,由 I 是固执理想得 $a * b \in I$. 注意到 $a * b \in L(X)$,我们有 $a * b \in L(I)$. 所以 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想. 当 $x \in I$ 和 $y \in X - I$ 时,由定理 3.5.7,$I = \bigcup \{V(a): a \in L(I)\}$,所以 $a_x \in L(I)$ 和 $a_y \in L(X) - L(I)$. 为了证明 $x * y \in X - I$,仅需证明 $a_{x*y} \in L(X) - L(I)$. 用反证法. 如果 $a_{x*y} \in L(I)$,由定理 3.16.1,$L(I)$ 是子代数,所以

$$a_y = a_x * (a_x * a_y) = a_x * a_{x*y} \in L(I).$$

这与 $a_y \in L(X) - L(I)$ 矛盾. 于是 $a_{x*y} \in L(X) - L(I)$.

(ii)　如果 $L(X)=L(I)$，由定理 3.16.2(i)$B(X)\cap I\neq B(X)$. 显然 $B(X)\cap I$ 是 $B(X)$ 的一个理想. 为了证明 $B(X)\cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想，任取 $x,y\in B(X)-B(X)\cap I$，则 $x,y\in B(X)$ 和 $x,y\in X-I$. 因为 $B(X)$ 是 X 的一个子代数，所以 $x,y\in B(X)$ 蕴涵 $x*y\in B(X)$. 因为 I 是 X 的一个固执理想，所以 $x,y\in X-I$ 蕴涵 $x*y\in I$. 于是 $x*y\in B(X)\cap I$. 这就证明了 $B(X)\cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想.

现在证明(ii) 的后半部分. 任取 $x\in I$ 和 $y\in X-I$. 则 $0*y\in L(X)=L(I)\subseteq I$. 因为 $(x*y)*(0*y)\leqslant x$，而 $x\in I$，所以 $(x*y)*(0*y)\in I$. 结合 $0*y\in I$，便得 $x*y\in I$. □

定理 3.16.4(S. M. Wei, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　假设 I 是BCI-代数 X 的一个理想. 则 I 是 X 的固执理想当且仅当 $B(X)\subseteq I$ 而 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想，或者 $L(X)\subseteq I$ 而 $B(X)\cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想.

证明　充分性　假设 $B(X)\subseteq I$ 且 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想. 由定理 3.5.2 和 $B(X)\subseteq I$ 知 I 是一个 p-理想. 利用定理 3.5.7 得 $I=\bigcup\{V(a):a\in L(I)\}$. 任取 $x,y\in X-I$，我们有 $a_x,a_y\in L(X)-L(I)$. 因为 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想，所以 $a_{x*y}=a_x*a_y\in L(I)$，由此得 $x*y\in I$. 这表明 I 是 X 的一个固执理想，

假设 $L(X)\subseteq I$ 而 $B(X)\cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想. 任取 $x,y\in X-I$. 因为 I 是理想，且 $a_x,a_y\in L(X)\subseteq I$，所以 $x*a_x\in X-I$ 和 $y*a_y\in X-I$. 另一方面，由定理 1.3.6，知 $x*a_x\in B(X)$ 和 $y*a_y\in B(X)$. 这就证明了 $x*a_x,y*a_y\in B(X)-B(X)\cap I$. 于是

$$[x*(y*a_y)]*a_x=(x*a_x)*(y*a_y)$$

$$\in B(X) \cap I \subseteq I$$

这儿利用了 $B(X) \cap I$ 是 $B(X)$ 的固执理想. 结合 $a_x \in I$ 得 $x * (y * a_y) \in I$. 因为

$$\begin{aligned} & [(x * y) * (0 * y)] * [x * (y * a_y)] \\ = & \{(x * y) * [x * (y * a_y)]\} * (0 * y) \\ \leqslant & [(y * a_y) * y] * (0 * y) \\ = & (0 * a_y) * (0 * y) \\ = & (0 * a_y) * (0 * a_y) \\ = & 0, \end{aligned}$$

所以 $(x * y) * (0 * y) \in I$. 注意到 $a_y \in I$ 蕴涵 $0 * y = 0 * a_y \in I$, 我们得 $x * y \in I$. 所以 I 是一个固执理想.

必要性　假设 I 是 X 的一个固执理想,由定理 3.16.2,或者 $B(X) \subseteq I$,或者 $L(X) = L(I)$. 利用定理 3.16.3,当 $B(X) \subseteq I$ 时, $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想;当 $L(X) = L(I)$ 时, $B(X) \cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想. □

借用强理想和(*)-理想,定理 3.16.3 可以重新表述如下.

定理 3.16.5　假设 I 是 BCI-代数 X 的一个固执理想,则

(i)　如果 $B(X) \subseteq I$,那末 I 是 X 的一个强理想,而 $L(I)$ 是 $L(X)$ 的一个固执理想;

(ii)　如果 $L(X) = L(I)$,那末 I 是 X 的一个(*)-理想,而 $B(X) \cap I$ 是 $B(X)$ 的一个固执理想.

现在,我们讨论同态映射问题.

定理 3.16.6(E. H. Roh, Y. B. Jun and S. M. Wei[1])　假设 X 和 Y 是 BCI-代数, $B(Y) \neq \{0\}$. 如果 I 是 X 的一个固执的(*)-

理想，则存在同态映射 $f:X\to Y$ 满足 $\mathrm{Ker}(f)=I$.

证明　任取 $c\in B(Y)-\{0\}$，定义 $f:X\to Y$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in I;\\ c, & x\in X-I.\end{cases}$$

显然 $\mathrm{Ker}(f)=I$. 仅需证 f 是一个同态映射. 分四种情形进行.

(1)　如果 $x,y\in I$，则由定理 3.16.1，I 是 X 的一个子代数，所以 $x*y\in I$. 于是

$$f(x*y)=0=0*0=f(x)*f(y).$$

(2)　如果 $x,y\in X-I$，因 I 是一个固执理想，所以 $x*y\in I$. 于是

$$f(x*y)=0=c*c=f(x)*f(y).$$

(3)　如果 $x\in I$ 和 $y\in X-I$，因 I 是一个 $(*)$- 理想，所以 $x*y\in I$. 于是

$$f(x*y)=0=0*c=f(x)*f(y).$$

(4)　如果 $x\in X-I$ 和 $y\in I$，则 $x*y\in X-I$. 于是

$$f(x*y)=c=c*0=f(x)*f(y).$$

总之，对任意 $x,y\in X$，$f(x*y)=f(x)*f(y)$. 所以 $f:X\to Y$ 是一个同态映射. □

下面的结论更一般.

定理 3.16.6(S. M. Wei, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　设 X 和 Y 是 BCI- 代数，其中 $B(Y)\neq\{0\}\neq G(Y)$. 如果 I 是 X 的一个固执理想，则存在同态映射 $f:X\to Y$ 使得 $\mathrm{Ker}(f)=I$.

证明　由定理 3.16.2，我们知道，或者 $L(X)\neq L(I)$ 或者 $B(X)\cap I\neq B(X)$.

(i)　如果 $L(X) \neq L(I)$，任取一个 $a \in G(Y) - \{0\}$，我们定义 $f: X \to Y$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in I; \\ a, & x \in X - I. \end{cases}$$

显然 $\mathrm{Ker}(f) = I$. 为证 f 是一个同态映射，任取 $x, y \in X$. 分四种情形讨论.

(1)　当 $x, y \in I$，因为 I 是一个闭理想(定理 3.16.1)，所以 $x * y \in I$. 于是

$$f(x * y) = 0 = 0 * 0 = f(x) * f(y).$$

(2)　当 $x \in I$ 和 $y \in X - I$ 时，由定理 3.16.3(i) 我们有 $x * y \in X - I$. 注意 $a \in G(Y)$ 蕴涵 $0 * a = a$，于是

$$f(x * y) = a = 0 * a = f(x) * f(y).$$

(3)　当 $x \in X - I$ 和 $y \in I$ 时，则 $x * y \in X - I$. 于是

$$f(x * y) = a = a * 0 = f(x) * f(y).$$

(4)　当 $x, y \in X - I$ 时，因为 I 是固执的，我们有 $x * y \in I$. 于是

$$f(x * y) = 0 = a * 0 = f(x) * f(y).$$

(ii)　如果 $B(X) \cap I \neq B(X)$，任取 $a \in B(Y) - \{0\}$，定义 $f: X \to Y$ 为：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in I; \\ a, & x \in X - I. \end{cases}$$

类似于定理 3.16.5，可以证明 f 是一个同态映射，且 $\mathrm{Ker}(f) = I$.

□

定理 3.16.7　假设 I 是BCI-代数 X 的一个理想. 则 I 是固执的当且仅当存在一个 BCI-代数 Y 使得 $|\dot{Y}| = 2$ 和一个同态映射 $f: X \to Y$ 使得 $\mathrm{Ker}(f) = I$.

证明　假设 $Y=\{0,a\}$，f 是 $X\to Y$ 的一个同态映射使得 $\mathrm{Ker}(f)=I$. 对任意 $x,y\in X-I$，$f(x)=f(y)=a$，因此

$$f(x*y)=f(x)*f(y)=a*a=0.$$

由此得 $x*y\in\mathrm{Ker}(f)=I$. 所以 I 是固执的.

相反地，假设 I 是一个固执理想. 由定理 3.16.2，$L(X)\neq L(I)$（等价地，$B(X)\subseteq I$）或者 $L(X)=L(I)$.

当 $L(X)\neq L(I)$ 时，取 $Y=\{0,a\}$，$*$ 运算为：$0*a=a*0=a$，$0*0=a*a=0$，则 $\langle Y;*,0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数. 令 $f:X\to Y$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in I;\\ a, & x\in X-I.\end{cases}$$

由定理 3.16.6 的证明(i) 知 f 是一个同态映射，且 $\mathrm{Ker}(f)=I$.

当 $L(X)=L(I)$ 时，取 $Y=\{0,a\}$，$*$ 运算为：$0*a=0*0=a*a=0$，$a*0=a$，则 $\langle Y;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 令 $f:X\to Y$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in I;\\ a, & x\in X-I.\end{cases}$$

由定理 3.16.6 的证明(ii)，f 是一个同态映射且 $\mathrm{Ker}(f)=I$. □

3.17　零化子

BCK- 代数的零化子由 M. Aslam and A. B. Thaheem[2] 首先提出的. Y. B. Jun, E. H. Roh and J. Meng[1] 将这一概念推广到 BCI- 代数中，并进行了初步研究.

定义 3.17.1　设 X 是一个 BCI- 代数，A 是 X 的一个非空子集. 则集

$$A^*=\{x\in X: a*(a*x)=0\quad\forall\, a\in A\}$$

叫做 A 的零化子.

显然,$0 \in A^*$,$X^* = \{0\}$,如果 $A = \{a\}$,简记$\{a\}^*$ 为 a^*.

例 3.17.1 设 $X = \{0,1,2,3\}$,$*$ 表为

$*$	0	1	2	3
0	0	0	3	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	3	0	0

则$\langle X; *, 0\rangle$是一个 BCI- 代数,但是$0^* = \{0,1\} \neq X$.这个例子说明,对于 BCI- 代数,一般地 $0^* \neq X$.

定理 3.17.1 $0^* = B(X)$.

证明 设 $x \in 0^*$,则 $0 = 0 * (0 * x) \leqslant x$,即 $x \in B(X)$.这表明 $0^* \subseteq B(X)$.相反地,对任意 $x \in B(X)$,则 $0 * (0 * x) = 0$,即 $x \in 0^*$.于是 $B(X) \subseteq 0^*$.所以 $0^* = B(X)$. □

由零化子的定义,易知下述结论

命题 3.17.2 设 A 和 B 是 BCI- 代数 X 的非空子集.如果 $A \subseteq B$,则 $B^* \subseteq A^*$. □

现在给出一个有用定理.

定理 3.17.3 若 A 是 BCI- 代数 X 的任一非空子集,则 $A^* \subseteq B(X)$.

证明 假设 $x \in X - B(X)$,则 $a_x = 0 * (0 * x)$ 是一个非零原子,于是对任意 $a \in A$ 有

$$a * (a * a_x) = a_x \neq 0.$$

另一方面 $a * (a * a_x) \leqslant a * (a * x)$. 所以 $a * (a * x) \neq 0$. 这说明 $x \notin A^*$. 这就证明了 $A^* \subseteq B(X)$. □

命题 3.17.4 设 A 是 BCI- 代数 X 的一个非空子集,则 $0 \in A$ 当且仅当 $A \cap A^* = \{0\}$.

证明 必要性 设 $0 \in A$. 任取 $x \in A \cap A^*$,则 $x * (x * x) = 0$,即 $x = 0$. 所以 $A \cap A^* = \{0\}$.

充分性 显然成立. □

作为一个推论,我们有:如果 A 是 X 的一个理想,则 $A \cap A^* = \{0\}$. 作为这个命题的一个直接结果,有

推论 3.17.5 如果 BCI- 代数的理想 A 和 B 满足 $A \subseteq B^*$ 或 $B \subseteq A^*$,则 $A \cap B = \{0\}$. □

定理 3.17.6 设 A 是 BCI- 代数 X 的一个非空子集,则 $x \in A^*$ 当且仅当对任意 $a \in A$ 恒有 $a = a * x$.

证明 如果 $x \in A^*$,则对任意 $a \in A$ 有 $a * (a * x) = 0$. 但由定理 3.17.3,$A^* \subseteq B(X)$,于是 $0 * x = 0$. 由此得

$$(a * x) * a = (a * a) * x = 0 * x = 0.$$

所以 $a = a * x$.

相反的结论是明显的. □

定理3.17.7 设A是BCI-代数X的一个非空子集.则A^*是X的一个闭理想.

证明 设$x*y\in A^*$和$y\in A^*$.对于任一个$a\in A$,由定理3.17.6,

$$a=a*(x*y),\ a=a*y.$$

于是

$$a=a*(x*y)=(a*y)*(x*y)\leqslant a*x,$$
$$a*(a*x)=0.$$

所以$x\in A^*$.这就证明了,A^*是X的一个理想.

因为$A^*\subseteq B(X)$,所以A^*还是X的一个闭理想. □

下面讨论零化子关于同态映射的性质.

定理3.17.8 设X和Y是BCI-代数,A是X的一个非空子集.如果$f:X\rightarrow Y$是一个同态,则$f(A^*)\subseteq f(A)^*$.

证明 设$y\in f(A^*)$和$b\in f(A)$,则存在$x\in A^*$和$a\in A$满足$y=f(x)$和$b=f(a)$.于是

$$\begin{aligned}b*(b*y)&=f(a)*(f(a)*f(x))\\&=f(a*(a*x))\\&=f(0)\\&=0,\end{aligned}$$

这就是说$y\in f(A)^*$. □

定理3.17.9 设X和Y是BCI-代数,B是Y的任一非空子集,则$f^{-1}(B^*)$是包含$f^{-1}(B)^*$的一个闭理想.

证明　由定理 3.17.7,B^* 是 Y 的一个闭理想. 利用定理 1.7.1(ii) 知,$f^{-1}(B^*)$ 是 X 的一个闭理想.

为了证明 $f^{-1}(B)^* \subseteq f^{-1}(B^*)$,任取 $x \in f^{-1}(B)^*$. 则对每个 $b \in B$ 有 $f^{-1}(b) * (f^{-1}(b) * x) = 0$. 由此得

$$\begin{aligned} b * (b * f(x)) &= f(f^{-1}(b)) * (f(f^{-1}(b)) * f(x)) \\ &= f(f^{-1}(b) * (f^{-1}(b) * x)) \\ &= f(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

因此 $f(x) \in B^*$,即 $x \in f^{-1}(B^*)$. □

定理 3.17.10　设 A 和 B 分别是 BCI- 代数 X 和 Y 的非空子集,则

(i)　$A^* \times B^* = (A \times B)^*$,

(ii)　$X/A^* \times Y/A^* \cong (X \times Y)/(A \times B)^*$.

证明　(i)　证明如下:

$$\begin{aligned} &(A \times B)^* \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: (a,b) * ((a,b) * (x,y)) \\ &\qquad = (0,0) \quad \forall\ (a,b) \in A \times B\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: (a * (a * x), b * (b * y)) \\ &\qquad = (0,0) \quad \forall\ (a,b) \in A \times B\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: a * (a * x) = 0, \\ &\qquad b * (b * y) = 0 \quad \forall\ (a,b) \in A \times B\} \\ &= \{x \in X: a * (a * x) = 0 \quad \forall\ a \in A\} \times \\ &\quad \{y \in Y: b * (b * y) = 0 \quad \forall\ b \in B\} \\ &= A^* \times B^*. \end{aligned}$$

(ii)　注意 $A^* \times B^*$ 是 $X \times Y$ 的一个理想,考察自然同态:

$$\eta_X: X \to X/A^*,\text{这儿 } \eta_X(x) = C_x \quad \forall\, x \in X;$$

$$\eta_Y: Y \to Y/B^*,\text{这儿 } \eta_Y(y) = C_y \quad \forall\, y \in Y.$$

定义映射 $f: X \times Y \to X/A^* \times Y/B^*$ 使得 $\forall\ (x,y) \in X \times Y$, $f(x,y) = (C_x, C_y)$. 显然 f 是一个满同态. 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f &= \{(x,y) \in X \times Y: f(x,y) = (C_0, C_0)\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: (C_x, C_y) = (C_0, C_0)\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: C_x = C_0, C_y = C_0\} \\ &= \{(x,y) \in X \times Y: x \in A^*, y \in B^*\} \\ &= A^* \times B^*,\end{aligned}$$

由同态基本定理和(i),我们有

$$(X \times Y)/(A \times B)^* \cong X/A^* \times Y/B^*.$$ □

现在借助于零化子讨论 BCI- 代数闭理想格的构造.

命题 3.17.11 设 X 是一个 BCK- 代数,A 和 B 是 X 的理想,则 $A \cap B = \{0\} \Leftrightarrow A \subseteq B^*$.

证明 必要性 设 $A \cap B = \{0\}$. 任取 $a \in A$,对任意 $b \in B$,由 BCI-2,我们有 $b * (b * a) \leqslant a$,所以 $b * (b * a) \in A$. 另一方面,由于 X 是 BCK- 代数,我们有 $b * (b * a) \leqslant b$,所以 $b * (b * a) \in B$. 综上所述,我们有 $b * (b * a) \in A \cap B = \{0\}$,即 $b * (b * a) = 0$. 这表明 $a \in B^*$. 所以 $A \subseteq B^*$.

充分性 由推论 3.17.5 可得. □

对于 BCK- 代数 X,M. Palasinski[1] 证明了:X 的闭理想格 $\langle CI(X); \vee, \wedge \rangle$ 是分配的. 结合命题 3.17.11,我们知道 $\langle CI(X); \vee, \wedge \rangle$ 是一个有伪补的分配格. 但是对于 BCI- 代数来说,这一重要结论不成立,在本章第 4 节已说明过. 现在进一步说明,即使对

某些 BCI- 代数 X，$\langle CI(X); \vee, \wedge\rangle$ 是分配的，但不是有伪补的.

例 3.17.2　设 $X = \{0,1,2,3\}$，$*$ 表和序图如下：

$*$	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

1
0
3
2

则 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，$CI(X) = \{\{0\},\{0,1\},\{0,2\},X\}$. 显然 $CI(X)$ 是分配格. 注意到 $\{0,1\} \cap \{0,2\} = \{0\}$ 但 $\{0,2\}$ 不是 $\{0,1\}^* = \{0\}$ 的子集. 所以 $CI(X)$ 不是有伪补的.

定理 3.17.12　设 X 是一个 BCI- 代数. 如果 $\langle CI(X); \vee, \wedge\rangle$ 是有伪补的分配格，则 X 是一个 BCK- 代数.　□

3.18　同　余

同余是一般代数的重要概念之一. 本节将讨论 BCI- 代数的同余概念.

定义 3.18.1　设 θ 是 BCI- 代数上的一个等价关系，即 θ 满足：对任意 $x, y, z \in X$，

(i)　$(x,x) \in \theta$；

(ii)　$(x,y) \in \theta$ 蕴涵 $(y,x) \in \theta$；

(iii)　$(x,y) \in \theta$ 和 $(y,z) \in \theta$ 蕴涵 $(x,z) \in \theta$.

我们称 θ 是 X 上的一个同余，如果 θ 有减法性质：

$(x,y) \in \theta$ 和 $(u,v) \in \theta$ 蕴涵 $(x*u, y*v) \in \theta$;

我们称 θ 是 X 上的一个*左同余*(L- 同余),如果对任意 $u \in X$, $(x,y) \in \theta$ 蕴涵 $(u*x, u*y) \in \theta$;

我们称 θ 是 X 上的一个*右同余*(R- 同余),如果对任意 $u \in X$, $(x,y) \in \theta$ 蕴涵 $(x*u, y*u) \in \theta$;

我们称 θ 是 X 上的一个*理想同余*(I- 同余),如果存在 X 的一个理想 I(诱导理想)使得 $(x,y) \in \theta$ 当且仅当 $x*y \in I$ 和 $y*x \in I$. 如果 I 还是一个闭理想,则称 θ 是一个*闭理想同余*(CI- 同余).

今后也将记 $(x,y) \in \theta$ 为 $x \sim y(\theta)$. 下述两个结论容易验证:

(1) 理想同余必是同余(见定理 1.6.1);

(2) θ 是一个同余当且仅当 θ 既是一个 L- 同余也是一个 R- 同余.

对于 X 上的等价关系 θ,我们将记等价类 $\{y : y \sim x(\theta)\}$ 为 C_x^θ(也简记为 C_x),记 $X/\theta = \{C_x : x \in X\}$.

定理 3.18.1(Z. M. Chen and H. X. Wang[1]) 如果 θ 是 BCI- 代数 X 上的一个 L- 同余,则 C_0 是 X 的一个闭理想.

证明 显然 $0 \in C_0$. 假设 $x*y \in C_0$ 和 $y \in C_0$,则 $x*y \sim 0(\theta)$ 和 $y \sim 0(\theta)$. 因为 θ 是左同余,由 $y \sim 0(\theta)$ 得 $x*y \sim x*0 = x(\theta)$. 结合 $x*y \sim 0(\theta)$,我们有 $x \sim 0(\theta)$,即 $x \in C_0$. 所以 C_0 是 X 的一个理想.

进一步,如果 $x \in C_0$,则 $x \sim 0(\theta)$. 因此 $0*x \sim 0*0 = 0(\theta)$,即 $0*x \in C_0$. 所以 C_0 还是 X 的一个闭理想. □

定理 3.18.2(Z. M. Chen and H. X. Wang[1]) θ 是 BCI- 代数 X 上的一个 I- 同余当且仅当 θ 是 X 上的一个 CI- 同余.

证明　充分性是显然的. 现证必要性. 设 θ 是 X 上的一个理想同余,其诱导理想为 I. 则 $x \sim y(\theta)$ 当且仅当 $x * y \in I$ 和 $y * x \in I$. 因为每个 I- 同余都是 L- 同余,由定理 3.18.1,C_0 是 X 的一个闭理想. 我们用 θ' 记由 C_0 诱导的 CI- 同余,则 $x \sim y(\theta')$ 当且仅当 $x * y \in C_0$ 和 $y * x \in C_0$. 现在仅需证明:$x \sim y(\theta)$ 当且仅当 $x \sim y(\theta')$. 显然 $x \sim y(\theta')$ 蕴涵 $x \sim y(\theta)$. 相反地,如果 $x \sim y(\theta)$,则 $x * y \in I$ 和 $y * x \in I$. 因为

$$
\begin{aligned}
[0 * (x * y)] * (y * x) &= [(x * x) * (x * y)] * (y * x) \\
&= 0 \in I,
\end{aligned}
$$

所以 $0 * (x * y) \in I$. 而 $(x * y) * 0 = x * y \in I$,于是我们有 $x * y \sim 0(\theta)$,即 $x * y \in C_0$. 同法可证 $y * x \in C_0$. 因此 $x \sim y(\theta')$. □

我们用 $\boldsymbol{LC}(X)$,$\boldsymbol{RC}(X)$,$\boldsymbol{C}(X)$,$\boldsymbol{CIC}(X)$,$\boldsymbol{IC}(X)$ 分别表示 BCI- 代数 X 上的所有左同余,右同余,同余,闭理想同余,理想同余的集. 它们有如下关系:

$$\boldsymbol{IC}(X) = \boldsymbol{CIC}(X) \subseteq \boldsymbol{C}(X) \subseteq \boldsymbol{LC}(X), \boldsymbol{RC}(X);$$

$$\boldsymbol{C}(X) = \boldsymbol{LC}(X) \cap \boldsymbol{RC}(X).$$

对于 $\theta \in \boldsymbol{C}(X)$,定义 X/θ 上的运算 $*$ 为:对任意 $x, y \in X$,$C_x * C_y = C_{x*y}$;定义映射 $\pi: X \to X/\theta$ 使得 $\pi(x) = C_x$. 显然 π 是一个同态映射.

例 3.18.1(A. Wroski[1])　设 $N = \{0,1,2,\cdots\}$,$A = \{a_n : n \in N\}$ 和 $B = \{b_n : n \in N\}$. 记 $X = N \cup A \cup B$,在 X 上定义 $*$ 运算为:对任意 $n, m \in N$,

$$n * m = \begin{cases} 0, & n < m; \\ n - m, & n \geqslant m, \end{cases}$$

$$n * a_m = n * b_m = 0,$$

$$b_m * n = b_{n+m},$$

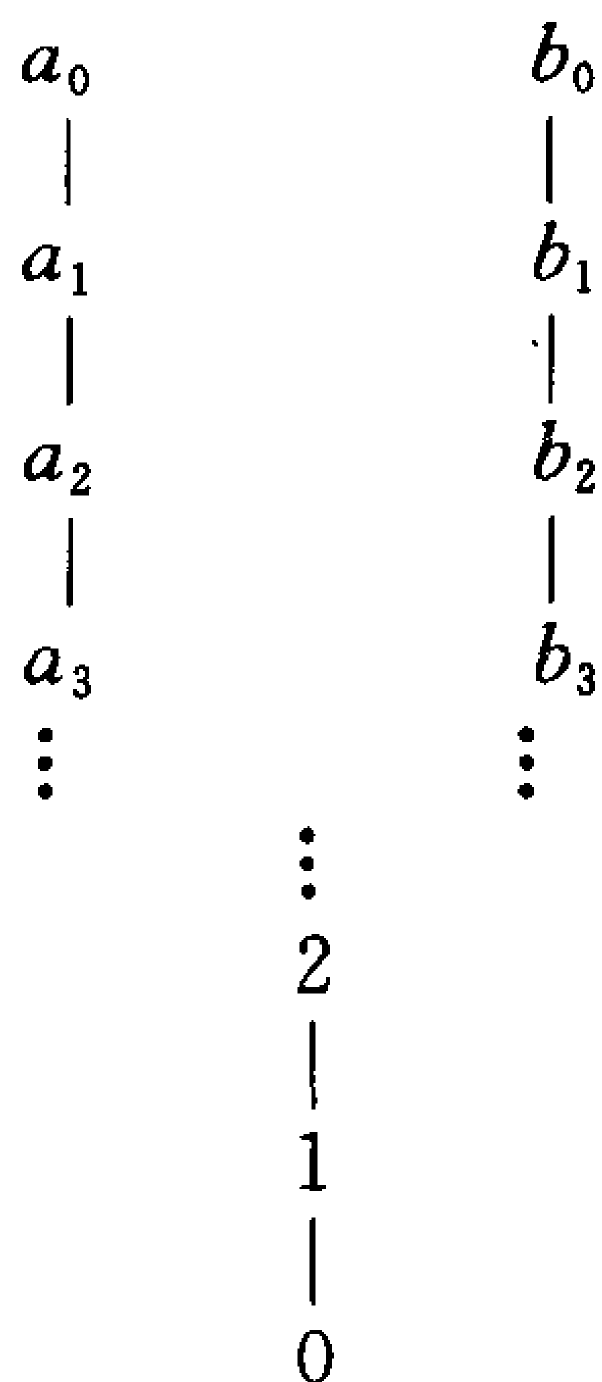
$$a_m * n = a_{n+m},$$

$$a_n * a_m = b_n * b_m = \begin{cases} 0, & m < n; \\ m - n, & m \geqslant n, \end{cases}$$

$$a_n * b_m = a_n * a_{m+1},$$

$$b_n * a_m = b_n * b_{m+1},$$

并且定义 $a \leqslant b$ 当且仅当 $a * b = 0$. 容易看出 $(X; \leqslant)$ 是一个偏序集,序关系图如下:



现在我们验证 $\langle N \cup A; *, 0\rangle$ 满足 BCI-1. 事实上,对任意 $n, m, s \in N$,仅需考虑下列 8 种情形:

(1) $n \leqslant m$,则

$$\begin{aligned}(a_n * s) * (a_n * a_m) &= a_{n+s} * (m - n) \\ &= a_{n+s+(m-n)} \\ &= a_{m+s} = a_m * s;\end{aligned}$$

(2) $n > m$,则

$$(a_n * s) * (a_n * a_m) = a_{n+s} * 0 \leqslant a_{m+s} = a_m * s;$$

(3) $n \leqslant m$,则

$$(a_n * a_m) * (a_n * s) = (m - n) * a_{n+s} = 0 = s * a_m;$$

(4)　$n > m$,则

$$(a_n * a_m) * (a_n * a_s) = 0 * (a_n * a_s) = 0 \leqslant a_s * a_m;$$

(5)　$m \leqslant n$,则

$$(a_n * a_m) * (a_n * a_s) = 0 * (a_n * a_s) = 0 \leqslant a_s * a_m;$$

(6)　$m > n \geqslant s$,则

$$\begin{aligned}(a_n * a_m) * (a_n * a_s) &= (m - n) * 0 \\ &\leqslant m - s = a_s * a_m;\end{aligned}$$

(7)　$m > s > n$,则

$$\begin{aligned}(a_n * a_m) * (a_n * a_s) &= (m - n) * (s - n) \\ &= (m - n) - (s - n) \\ &= m - s = a_s * a_m;\end{aligned}$$

(8)　$s \geqslant m > n$,则

$$\begin{aligned}(a_n * a_m) * (a_n * a_s) &= (m - n) * (s - n) \\ &= 0 = a_s * a_m.\end{aligned}$$

而 $N \cup A$ 显然满足 $x * 0 = x$ 和 BCI-4. 由定理 1.1.6 知 $\langle N \cup A; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 而 $0 * x = 0$ 显然成立,所以 $\langle N \cup A; *, 0\rangle$ 还是 BCK- 代数.

类似地可证 $\langle N \cup B; *, 0\rangle$ 也是 BCK- 代数.

容易看出 $\langle N \cup A; *, 0\rangle$ 和 $\langle N \cup B; *, 0\rangle$ 同构,并且 $\langle X; *, 0\rangle$ 满足 BCK-4 和 $x * 0 = x$. 为了证明 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,只需验证 X 满足 BCK-1,这只要验证下列各式就够了:对任意 $n, m, s \in N$,

(9)　$(s * a_n) * (s * b_m) \leqslant b_m * a_n$;

(10)　$(a_n * s) * (a_n * b_m) \leqslant b_m * s$;

(11)　$(a_n * b_m) * (a_n * s) \leqslant s * b_m$;

(12)　$(b_s * a_n) * (b_s * a_m) \leqslant a_m * a_n$;

(13)　$(a_n * b_s) * (a_n * a_m) \leqslant a_m * b_s$;

(14) $(a_n * a_m) * (a_n * b_s) \leqslant b_s * a_m$.

因为 $s * a_n = s * b_m = 0$,所以(9) 成立.

因为

$$(a_n * s) * (a_n * b_m) = (a_n * s) * (a_n * a_{m+1}) \leqslant a_{m+1} * s = a_{m+s+1} \leqslant b_{m+s} = b_m * s$$

这儿利用了$\langle N \cup A; * ,0\rangle$ 是 BCK- 代数,所以(10) 成立.

因为 $a_n * b_m = a_n * a_{m+1} \in N, a_n * s = a_{n+s} \in A$,所以

$$(a_n * b_m) * (a_n * s) = 0 \leqslant s * b_m,$$

(11) 成立.

由于$\langle N \cup B; * ,0\rangle$ 是 BCK- 代数,我们有

$$(b_s * a_n) * (b_s * a_m) = (b_s * b_{n+1}) * (b_s * b_{m+1}) \leqslant b_{m+1} * b_{n+1} = b_m * b_n = a_m * a_n,$$

(12) 成立.

利用$\langle N \cup A; * ,0\rangle$ 是一个 BCK- 代数,我们有

$$(a_n * b_s) * (a_n * a_m) = (a_n * a_{s+1}) * (a_n * a_m) \leqslant a_m * a_{s+1} = a_m * b_s,$$

(13) 成立.

因为

$$(a_n * a_m) * (a_n * s) = (a_n * a_m) * (a_n * a_{s+1}) \leqslant a_{s+1} * a_m \leqslant a_s * a_m \leqslant a_s * a_{m+1} = b_s * b_{m+1} = b_s * a_m,$$

所以(14) 成立.

我们已证$\langle X; * ,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数.

分划$\{N,A,B\}$ 在 X 上确定一个等价关系:$\forall x,y \in X, x \sim y$

当且仅当 x 和 y 属于 $\{N,A,B\}$ 中同一个集合. 下面验证 $\sim$ 还是 X 上的同余关系. 分 3 种情形讨论：

第 1，$x\in N$ 和 $y\in N$.

对任意 $n\in N$，我们有 $x*n\in N$ 和 $y*n\in N$，即 $x*n\sim y*n$；同理可知，$n*x\sim n*y$.

对任意 $a_n\in A$，我们有 $x*a_n=y*a_n=0\in N$，所以 $x*a_n\sim y*a_n$；$a_n*x=a_{n+x}\in A$，$a_n*y=a_{n+y}\in A$. 所以 $a_n*x\sim a_n*y$.

同法可证：$\forall\ b_n\in B$，$x*b_n\sim y*b_n$ 和 $b_n*x\sim b_n*y$.

第 2，$x\in A$ 和 $y\in A$. 无妨设 $x=a_n$，$y=a_m$.

对于任意 $s\in N$，我们有

$$a_n*s=a_{n+s}\in A,$$

$$a_m*s=a_{m+s}\in A,$$

$$s*a_n=s*a_m=0\in N,$$

所以 $a_n*s\sim a_m*s$ 和 $s*a_n\sim s*a_m$.

对于任意 $a_s\in A$，我们有

$$a_n*a_s\in N \text{ 和 } a_m*a_s\in N,$$

$$a_s*a_n\in N \text{ 和 } a_s*a_m\in N,$$

所以 $a_n*a_s\sim a_m*a_s$ 和 $a_s*a_n\sim a_s*a_m$.

对于任意 $b_s\in B$，我们有

$$a_n*b_s=a_n*a_{s+1}\in N,$$

$$a_m*b_s=a_m*a_{s+1}\in N,$$

$$b_s*a_n=b_s*b_{n+1}\in N,$$

$$b_s*a_m=b_s*b_{m+1}\in N,$$

所以 $a_n*b_s\sim a_m*b_s$ 和 $b_s*a_n\sim b_s*a_m$.

第 3，$x\in B$ 和 $y\in B$. 与第 2 种情形相似，可证对任意 $z\in X$，$x*z\sim y*z$ 和 $z*x\sim z*y$.

以上证明了 $\sim$ 是 X 上的一个同余.

X 关于 $\sim$ 的商 $X/\sim=\{N,A,B\}$. 由于 $A*B=B*A=N$，

而 N 是商代数 $X/\sim$ 的零元素，但是 $A \neq B$. 所以商代数 $\langle X/\sim; *, N\rangle$ 不是一个 BCI- 代数.

这个例子是一个著名的例子，它说明一个 BCI- 代数关于一个同余关系的商代数可能不是一个 BCI- 代数，即 BCI- 代数类不构成一个代数簇. 应当注意的是，BCI- 代数定义中的 4 个条件，前 3 条是方程，而第 4 条不是方程. 在 A. Wroski 的例子中，商代数正好不满足第 4 条. 由此可以给出下述结果.

定理 3.18.3(Z. M. Chen and H. X. Wang[1]) 设 θ 是 BCI- 代数 X 上的一个同余，则下列条件彼此等价：

(i) $x * y \sim 0(\theta)$ 和 $y * x \sim 0(\theta)$ 蕴涵 $x \sim y(\theta)$；

(ii) θ 与 C_0 诱导的理想同余相同；

(iii) $\langle X/\theta; *, C_0\rangle$ 是一个 BCI- 代数.

证明 (i)⇒(ii) 假设 x 和 y 关于 C_0 诱导的理想同余是同余的，则 $x * y \in C_0$ 和 $y * x \in C_0$，因此 $x * y \sim 0(\theta)$ 和 $y * x \sim 0(\theta)$. 由(i) 得 $x \sim y(\theta)$.

相反地，假设 $x \sim y(\theta)$，则 $C_x = C_y$. 因此

$$C_{x*y} = C_x * C_y = C_0,$$

$$C_{y*x} = C_y * C_x = C_0,$$

所以 $x * y \in C_0$ 和 $y * x \in C_0$. 这表明 x 和 y 关于 C_0 诱导的理想同余是同余的.

(ii)⇒(iii) 假设(ii) 成立，则 $X/\theta = X/C_0$. 由定理 1.6.2，$\langle X/\theta; *, C_0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. 于是(iii) 成立.

(iii)⇒(i) 如果 $x * y \sim 0(\theta)$ 和 $y * x \sim 0(\theta)$，则

$$C_x * C_y = C_{x*y} = C_0,$$

$$C_y * C_x = C_{y*x} = C_0.$$

由(iii)知 X/C_0 是一个 BCI-代数，所以 $C_x = C_y$，即 $x \sim y(\theta)$. 这表明(i)成立. □

类似地可以证明.

定理 3.18.4(Z. M. Chen and H. X. Wang[1])　假设 θ 是 BCI-代数的一个 L-同余，则下列条件等价：

(i)　$x * y \sim 0(\theta)$ 和 $y * x \sim 0(\theta)$；

(ii)　θ 与 C_0 诱导的理想同余相同. □

推论 3.18.5　如果 BCI-代数 X 上的每一个同余都是理想同余，则映射 $f: \boldsymbol{C}(X) \to \boldsymbol{CIC}(X)$ 使得 $\forall\, \theta \in \boldsymbol{C}(X), f(\theta) = C_0^\theta$ 是一对一的. □

第4章　几个重要的子代数

从前三章的讨论知，对于任一个 BCI- 代数 X，BCK- 部分 $B(X)$，p- 半单部分 $L(X)$，结合部分 $G(X)$，和拟结合部分 $Q(X)$ 总是 X 的子代数. 在第2章节2，我们已证明了 $Q(X)$ 还是 X 的一个理想. 在第1章节6证明了 $B(X)$ 是 X 的一个理想. 但是一般地，$G(X)$ 和 $L(X)$ 不是 X 的理想. 在什么条件下，它们是 X 的一个理想呢?这是本章要讨论的重要内容.

为了方便读者，首先回顾一下这些符号的意义.

$$B(X) = \{x \in X: 0 \leqslant x\} = \{x \in X: 0 * x = 0\},$$

$$L(X) = \{x \in X: 0 * (0 * x) = x\} = \{0 * (0 * x): x \in X\} = \{0 * x: x \in X\},$$

$$G(X) = \{x \in X: 0 * x = x\},$$

$$Q(X) = \bigcup \{V(a): a \in G(X)\}$$

由定义易知 $G(X) = Q(X) \cap L(X), B(X) \subseteq Q(X)$.

4.1　p- 半单部分

本节讨论在什么条件下 $L(X)$ 是 X 的一个理想. 由此问题的解答引入了一类 BCI- 代数. 这个问题分别由 W. P. Huang[1], J. Meng and X. L. Xin[3], Q. Zhang[7], M. Kondo[2] 予以解决.

定理 4.1.1(J. Meng and X. L. Xin[3])　设 X 是一个 BCI-代数，则下列条件彼此等价：对任意 $x \in X$ 和 $a, b \in L(X)$

(i)　$L(X)$ 是 X 的一个理想；

(ii)　$x * b = a * b$ 蕴涵 $x = a$；

(iii)　$x * a = 0 * a$ 蕴涵 $x = 0$；

(iv)　$x * a = y * a$ 蕴涵 $x = y$.

证明　(i)⇒(ii)　设 $L(X)$ 是 X 的一个理想. 如果 a 和 b 是原子，则 $a * b$ 亦是原子. 因此由 $x * b = a * b$ 得 $x * b \in L(X)$. 由 $b \in L(X)$ 和 $L(X)$ 是理想知，$x \in L(X)$. 于是由定理 1.3.1(viii) 得 $b * x = 0 * (x * b) = 0 * (a * b) = b * a$. 由此得

$$x = b * (b * x) = b * (b * a) = a.$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(iii)　平凡的.

(iii)⇒(iv)　设 $a \in L(X)$ 且 $x * a = y * a$. 则

$$(x * y) * a = (x * a) * y = (y * a) * y = 0 * a.$$

由(iii)，$x * y = 0$. 同法可证 $y * x = 0$. 所以 $x = y$. (iv) 成立.

(iv)⇒(i)　设 $x * a \in L(X)$ 和 $a \in L(X)$. 由定理 1.3.6，$x * a = a_x * a$. 利用(iv) 得 $x = a_x \in L(X)$. 这表明 $L(X)$ 是 X 的一个理想. (i) 成立. □

定理 4.1.2(W. P. Huang[1])　$L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $\forall\, x, y \in B(X)$ 和 $\forall\, a, b \in L(X)$，

$$x * a = y * b \text{ 蕴涵 } x = y \text{ 和 } a = b.$$

证明　设 $L(X)$ 是 X 的一个理想，且 $x * a = y * b$ 这儿 $x, y \in B(X)$ 和 $a, b \in L(X)$. 注意到 $0 * x = 0 * y = 0$，我们有

$$a = 0 * (0 * a)$$

$$\begin{aligned}&= (0 * x) * (0 * a)\\&= 0 * (x * a)\\&= 0 * (y * b)\\&= (0 * y) * (0 * b)\\&= 0 * (0 * b)\\&= b,\end{aligned}$$

因此 $x * a = y * a$. 由此得

$$(x * y) * a = (x * a) * y = (y * a) * y = 0 * a.$$

利用定理 4.1.1(iii) 知 $x * y = 0$. 同理可证 $y * x = 0$. 所以 $x = y$. 必要性得证.

充分性得显然的. □

定理 4.1.3(J. Meng, S. M. Wei and Y. B. Jun[1]) $L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $\forall\, x \in X$ 和 $\forall\, b \in L(X)$,

$$x = (x * b) * (0 * b).$$

证明 设 $L(X)$ 是 X 的一个理想且 $b \in L(X)$,则对任意 $x \in X$,

$$\begin{aligned}&(x * ((x * b) * (0 * b))) * b\\&= (x * b) * ((x * b) * (0 * b))\\&= 0 * b.\end{aligned}$$

由定理 4.1.1(iii) 得 $x * ((x * b) * (0 * b)) = 0$. 另一方面,

$$\begin{aligned}((x * b) * (0 * b)) * x &= ((x * x * b) * (0 * b)\\&= (0 * b) * (0 * b)\\&= 0.\end{aligned}$$

所以 $x = (x * b) * (0 * b)$. 必要性得证.

相反地,假设对任意 $x \in X$ 和 $b \in L(X)$ 有

$$x = (x * b) * (0 * b).$$

如果 $x*a \in L(X)$ 和 $a \in L(X)$，注意到 $x*a \in V(a_x * a)$，我们有 $x*a = a_x * a$. 于是

$$x = (x*a)*(0*a) = (a_x*a)*(0*a) \in L(X).$$

这表明 $L(X)$ 是 X 的一个理想. 充分性得证. □

推论 4.1.4(W. P. Huang[1])　$L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当对任意 $x \in X$ 存在唯一的 $u \in B(X)$ 和唯一的 $v \in L(X)$ 使得 $x = u*v$.

证明　如果 $u \in B(X)$ 和 $v \in L(X)$ 使得 $x = u*v$，由定理 4.1.3 知 $x = (x*a_x)*(0*a_x)$，这儿 $x*a_x \in B(X)$ 和 $0*a_x \in L(X)$，因此

$$u*v = (x*a_x)*(0*a_x).$$

由定理 3.1.2 得 $u = x*a_x$ 和 $v = 0*a_x$. 所以分解式 $x = u*v$ 是唯一的. □

定理 4.1.5(J. Meng, S. M. Wei and Y. B. Jun[1])　$L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $\forall\, x,y \in X$ 和 $\forall\, a,b \in L(X)$

(5)　$(x*a)*(y*b) = (x*y)*(a*b)$.

证明　设 $L(X)$ 是 X 的一个理想且 $x,y \in X$ 和 $a,b \in L(X)$. 因为

$$\begin{aligned}
&(((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b)))*a \\
&= (((x*a)*((x*a)*(y*b)))*y)*(a*b) \\
&\leqslant ((y*b)*y)*(a*b) \\
&= (0*b)*(a*b) \\
&= 0*a,
\end{aligned}$$

由 $0*a \in L(X)$ 知

$$(((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b)))*a=0*a.$$

由定理 4.1.1(iii) 得

$$(1)\quad ((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b))=0.$$

由于

$$\begin{aligned}&(((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b)))*(a*b)\\&=(((x*(a*b))*((x*y)*(a*b)))*(y*b))*a\\&\leqslant((x*(x*y))*(y*b))*a\\&\leqslant(y*(y*b))*a\\&=b*a\\&=0*(a*b),\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}&(((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b)))*(a*b)\\&=0*(a*b).\end{aligned}$$

利用定理 4.1.3(iii) 得

$$((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b))=0.$$

结合(1) 得

$$(x*a)*(y*b)=(x*y)*(a*b).$$

(i) 成立.

相反地,设(i) 成立.如果 $x*a=y*a$ 这儿 $a\in L(X)$,则由(i) 得

$$x*y=(x*y)*(a*a)=(x*a)*(y*a)=0.$$

同理得 $y*x=0$.所以 $x=y$.由定理 4.1.1,$L(X)$ 是 X 的一个理想. □

受此结果的启发,引进下述映射.设 X 是一个 BCI-代数,映射 $p:X\to X$ 被定义为:$\forall\, x\in X, p(x)=x*a_x$.容易看出 $p(X)\subseteq B(X)$.借助于这个映射,我们给出 $L(X)$ 是理想的一个条件.

引理 4.1.6 $a \in L(X)$ 当且仅当 $p(a) = 0$.

证明 平凡的. □

定理 4.1.7(J. Meng, S. M. Wei and Y. B. Jun[2]) $L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $p \in \mathrm{Hom}(X)$.

证明 设 $L(X)$ 是 X 的一个理想，由定理 4.1.5，

$$\begin{aligned} p(x * y) &= (x * y) * a_{x*y} \\ &= (x * y) * (a_x * a_y) \\ &= (x * a_x) * (y * a_y) \\ &= p(x) * p(y). \end{aligned}$$

因此 $p \in \mathrm{Hom}(X)$.

相反地，设 $p \in \mathrm{Hom}(X)$. 如果 $x * y, y \in L(X)$，由引理 4.1.6 得

$$p(x) = p(x) * 0 = p(x) * p(y) = p(x * y) = 0.$$

所以 $x \in L(X)$，即 $L(X)$ 是 X 的一个理想. □

定理 4.1.8(J. Meng, S. M. Wei and Y. B. Jun[1]) $L(X)$ 是 X 的一个理想当且仅当存在 $f \in \mathrm{Hom}(X)$ 使得对任意 $a \in L(X)$，$f|_{V(a)}$ 是 $V(a)$ 到 $B(X)$ 上的一个双射.

证明 设 $L(X)$ 是一个理想. 由定理 4.1.7，$p \in \mathrm{Hom}(X)$. 如果 $x, y \in V(a)$ 满足 $x \neq y$，则 $x * y \neq 0$ 或 $y * x \neq 0$. 由定理 4.1.5 得

$$p|_{V(a)}(x) * p|_{V(a)}(y) = p(x) * p(y)$$
$$= (x * a) * (y * a) = (x * y) * (a * a) = x * y.$$

同理 $p|_{V(a)}(y) * p|_{V(a)}(x) = y * x$. 因此 $p(x) * p(y) \neq 0$ 或

$p(y) * p(x) \neq 0$. 这就是说 $p|_{V(a)}$ 是 $V(a)$ 到 $B(X)$ 的一个单射.

对于任意 $x \in B(X)$，由定理 1.3.6 知 $x * (0 * a) \in V(a)$，于是

$$
\begin{aligned}
p|_{V(a)}(x * (0 * a)) &= (x * (0 * a)) * a \\
&= (x * a) * (0 * a) \\
&= x.
\end{aligned}
$$

这表明 $p|_{V(a)}$ 是 $V(a)$ 到 $B(X)$ 的一个满射. 所以 $p|_{V(a)}$ 是 $V(a)$ 到 $B(X)$ 的一个双射.

相反地，设存在一个 $f \in \mathrm{Hom}(X)$ 使得对任意 $a \in L(X)$，$f|_{V(a)}$ 是 $V(a)$ 到 $B(X)$ 的一个双射. 易知 $f(a) = 0 \forall\ a \in L(X)$. 因此对任意 $x \in X$ 和 $b \in L(X)$，

$$
\begin{aligned}
f((x * b) * (0 * b)) &= (f(x) * f(b)) * (f(0) * f(b)) \\
&= (f(x) * 0) * (0 * 0) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

由于 x 和 $(x * b) * (0 * b)$ 在同一分支，所以

$$x = (x * b) * (0 * b).$$

由定理 4.1.3，$L(X)$ 是 X 的一个理想. □

注 Q. Zhang[7] 也得到了定理 4.1.3 和定理 4.1.5.

4.2 KL-积 BCI-代数

设 $\langle X; *_1, 0_1\rangle$ 和 $\langle Y; *_2, 0_2\rangle$ 是 BCI-代数，则 $\langle X \times Y; *, 0\rangle$ 亦是 BCI-代数，其中 $0 = (0_1, 0_2)$，$*$ 定义为 $\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$，$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 *_1 x_2, y_1 *_2 y_2)$. 如果 X 是一个 BCK-代数，Y 是一个 p-半单 BCI-代数，则 $\langle X \times Y; *, 0\rangle$ 是一个 KL-积 BCI-代数. 它的一般定义如下：

定义 4.2.1　一个 BCI- 代数 X 叫做 KL- 积的，如果存在 BCK- 代数 Y 和 p- 半单 BCI- 代数 Z 使得 $X \cong Y \times Z$.

关于积代数的原子和分支，我们有

定理 4.2.1　设 $\langle X; *_1, 0_1\rangle$ 和 $\langle Y; *_2, 0_2\rangle$ 是 BCI- 代数. 则 $L(X \times Y) = L(X) \times L(Y)$；对任意 $(a,b) \in L(X \times Y)$，$V((a,b)) = V(a) \times V(b)$；特别地，$B(X \times Y) = B(X) \times B(Y)$.

证明　设 $a \in L(X)$ 和 $b \in L(X)$. 对于任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$，如果 $(x,y) * (a,b) = (x *_1 a, y *_2 b) = 0$，则 $x *_1 a = 0_1$ 和 $y *_2 b = 0_2$. 因此 $x = a, y = b$，即 $(x,y) = (a,b)$. 这表明 $L(X) \times L(Y) \subseteq L(X \times Y)$.

相反地，设 $(a,b) \in L(X \times Y)$. 对任意 $x \in X$，如果 $x *_1 a = 0_1$，则 $(x,b) * (a,b) = (x *_1 a, b *_2 b) = (0_1, 0_2) = 0$. 由 $(a,b) \in L(X \times Y)$ 知 $(x,b) = (a,b)$. 于是 $x = a$，这表明 $a \in L(X)$. 同理 $b \in L(Y)$. 所以 $L(X \times Y) \subseteq L(X) \times L(Y)$.

综上所述，$L(X \times Y) = L(X) \times L(Y)$.

若 $(x,y) \in V((a,b))$，则 $(a,b) \leqslant (x,y)$. 这等价于 $a \leqslant x, b \leqslant y$，即 $x \in V(a)$ 和 $y \in V(b)$. 因此 $V((a,b)) \subseteq V(a) \times V(b)$. 相反地，若 $(x,y) \in V(a) \times V(b)$，则 $x \in V(a)$ 和 $y \in V(b)$. 即 $a \leqslant x$ 和 $b \leqslant y$，这等价于 $(a,b) \leqslant (x,y)$. 因此 $(x,y) \in V((a,b))$. 这证明了 $V(a) \times V(b) \subseteq V((a,b))$. 所以 $V((a,b)) = V(a) \times V(b)$.

□

定理 4.2.2　$L(X \times Y)$ 是 $X \times Y$ 的一个理想当且仅当 $L(X)$ 和 $L(Y)$ 分别是 X 和 Y 的理想.

证明 设 $L(X)$ 和 $L(Y)$ 分别是 X 和 Y 的理想，且 $(x,y) \in X \times Y$，即 $x \in X$ 和 $y \in Y$. 对任意 $(a,b) \in L(X \times Y)$，由定理 4.2.1，$a \in L(X)$ 和 $b \in L(X)$. 利用定理 4.1.3，

$$x = (x *_1 a) *_1 (0_1 * a),$$

$$y = (y *_2 b) *_2 (0_2 *_2 a).$$

所以

$$(x,y) = ((x,y) * (a,b)) * (0 * (a,b)).$$

由定理 4.1.3，$L(X \times Y)$ 是 $X \times Y$ 的一个理想.

相反的证明是容易的. □

推论 4.2.3 设 X 是一个 BCK- 代数，Y 是一个 p- 半单 BCI- 代数，则 $\{(0,a):a \in Y\} = L(X \times Y)$ 是 $X \times Y$ 的一个理想.

证明 因为 $L(X) = \{0\}$，$L(Y) = Y$，所以 $L(X \times Y) = \{(0, a):a \in Y\}$. 显然 $\{0\}$ 和 Y 分别是 X 和 Y 的理想，因此 $\{(0,a):a \in Y\}$ 是 $X \times Y$ 的理想. □

现在我们给出 KL- 积 BCI- 代数的理想刻画.

定理 4.2.4(J. Meng and X. L. Xin[3]) 一个 BCI- 代数 X 是 KL- 积的当且仅当 $L(X)$ 是 X 的理想.

证明 设 $L(X)$ 是 X 的一个理想. 定义映射 $g:X \to B(X) \times L(X)$ 使得 $\forall x \in X$，$g(x) = (x * a_x, a_x)$. 则 g 具有下列性质：

(1) $g \in \mathrm{Hom}(X, B(X) \times L(X))$.

事实上，由定理 4.1.5 知 $\forall x,y \in X$

$$g(x * y) = ((x * y) * a_{x*y}, a_{x*y})$$

$$= ((x * y) * (a_x * a_y), a_x * a_y)$$
$$= ((x * a_x) * (y * a_y), a_x * a_y)$$
$$= (x * a_x, a_x) * (x * a_y, a_y)$$
$$= g(x) * g(y).$$

(2)　g 是一个单射

如果 $g(x) = g(y)$ 则 $(x * a_x, a_x) = (y * a_y, a_y)$，即 $x * a_x = y * a_y$ 和 $a_x = a_y$. 因此 $x * a_x = y * a_x$. 由定理 4.1.1，$x = y$. 所以 g 是一个单射.

(3)　g 是满的.

对任意 $(y,z) \in B(X) \times L(X)$ 有 $y \in B(X)$ 和 $z \in L(X)$. 令 $x = y * (0 * z)$. 则

$$a_x = a_y * (0 * z)$$
$$= a_y * (a_0 * a_z)$$
$$= 0 * (0 * z)$$
$$= z.$$

因此

$$g(x) = (x * a_x, a_x)$$
$$= ((y * (0 * z)) * z, z)$$
$$= ((y * z) * (0 * z), z)$$
$$= (y, z).$$

综上所述，g 是一个同构映射. 所以 X 是 KL- 积 BCI- 代数.

相反地，设 X 是 KL- 积 BCI- 代数，即存在 BCK- 代数 Y 和 p-半单 BCI- 代数 Z 使得 $X \cong Y \times Z$. 记 f 为 X 到 $Y \times Z$ 上的同构映射. 则 $L(X) = f^{-1}(L(Y \times Z))$. 推论 4.2.3 告诉我们，$L(Y \times Z)$ 是 $Y \times Z$ 的一个理想. 所以 $L(X)$ 是 X 的一个理想. □

作为上述结果的一个应用，现在讨论在什么条件下，一个 BCI- 代数的所有子代数是理想.

定义 4.2.2 假设 X 是一个 BCK-代数. 如果 X 的每个非零元素均是集 X-$\{0\}$ 关于 BCI-序的极小元,则称 X 满足条件(A).

定理 4.2.5(W. P. Huang[3]) 假设 X 是一个 BCK-代数,则下列条件等价:

(i) X 满足条件(A);

(ii) $(\forall x,y \in X)(x * y \neq 0 \Rightarrow x * y = x)$;

(iii) X 的每个子代数是 X 的一个理想.

证明 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(iii) 设 S 是 X 的一个子代数,并且 $x * y \in S$ 和 $y \in S$. 如果 $x * y = 0$,则 $x \leqslant y$. 因此 $x \in S$. 如果 $x * y \neq 0$,由(ii), $x * y = x$. 所以 $x \in S$. 这说明 S 是 X 的一个理想.

(iii)⇒(i) 任取 $a \in X - \{0\}$,显然 $S = \{0,a\}$ 是 X 的一个子代数. 由(iii),S 也是 X 的一个理想. 如果 $x \leqslant a$,则 $x * a = 0 \in S$. 所以 $x \in S$. 由此知 $x = 0$ 或 $x = a$. 这就是说,a 是 $X - \{0\}$ 的一个极小元. (i) 成立. □

定理 4.2.6(W. P. Huang[3]) 假设 X 是一个 BCI-代数,则 X 的每个子代数是 X 的一个理想当且仅当 X 是 KL-积的,并且 $B(X)$ 满足条件(A).

证明 充分性 假设 X 是 KL-积的,并且 $B(X)$ 满足条件(A). 由定理 4.2.4,$L(X)$ 是 X 的一个理想. 任取 X 的一个子代数 S,显然 $0 \in S$. 为了证明 S 是 X 的一理想,设 $x * y \in S$ 和 $y \in S$. 现在仅需证明 $x \in S$. 由于 S 是一个子代数,我们有

(4) $a_y = 0 * (0 * y) \in S$;

(5)　$y * a_y \in S$；

(6)　$a_{x*y} = 0 * (0 * (x * y)) \in S$；

(7)　$a_y * a_x = 0 * (a_x * a_y) = 0 * a_{x*y} \in S$.

因为 $a_x = a_y * (a_y * a_x)$，由(4) 和(7) 得

(8)　$a_x \in S$；

(9)　$0 * a_x \in S$.

现在考察$(x * a_x) * (y * a_y)$. 注意到 $x * a \in B(X)$ 和 $y * a_y \in B(X)$. 因为 $B(X)$ 满足条件(A)，由定理 4.2.5 知，只有两种可能性：$(x * a_x) * (y * a_y) = 0$ 和$(x * a_x) * (y * a_y) = x * a_x$.

当 $(x * a_x) * (y * a_y) = 0$ 时，则 $x * a_x \leqslant y * a_y)$. 由定理 4.2.5 或者 $x * a_x = 0$ 或者 $x * a_x = y * a_y$. 如果 $x * a_x = 0$，则 $x \leqslant a_x$. 结合 $a_x \leqslant x$，我们有 $x = a_x \in S$，这儿利用了(8). 如果 $x * a_x = y * a_y$，由(5) 得 $x * a_x \in S$. 利用定理 4.1.3 得

$$x = (x * a_x) * (0 * a_x) \in S.$$

当$(x * a_x) * (y * a_y) = x * a_x$ 时，由定理 4.1.5 和(6)

$$\begin{aligned} x * a_x &= (x * a_x) * (y * a_y) \\ &= (x * y) * (a_x * a_y) \\ &= (x * y) * a_{x*y} \in S. \end{aligned}$$

综合所述，我们已证 S 是 X 的理想. 充分性得证.

必要性　假设 X 的每个子代数是 X 的一个理想. 由于 $L(X)$ 是 X 的一个子代数，所以 $L(X)$ 是 X 的一个理想. 由定理 4.2.4，X 是 KL- 积的. 注意到 $B(X)$ 是 X 的最大 BCK- 代数，所以 $B(X)$ 的每个子代数是 $B(X)$ 的一个理想，由定理 4.2.5，$B(X)$ 满足条件(A). □

定理 4.2.7　设 $X = Y \times Z$ 其中 Y 是一个 BCK- 代数，Z 是一个 p- 半单 BCI- 代数. 则

(i)　X 是可换的当且仅当 Y 是一个可换 BCK- 代数；

(ii) X 是正定关联的当且仅当 Y 是一个正定关联 BCK- 代数；

(iii) X 是关联的当且仅当 Y 是一个关联 BCK- 代数；

(iv) X 是具有条件(S)的当且仅当 Y 是一个具有条件(S)的 BCK- 代数；

(v) X 是拟结合的当且仅当 Z 是结合的.

证明 略. □

推论 4.2.8 设 X 是一个 BCI- 代数，$L(X)$ 是 X 的一个理想，则 X 是可换(正定关联，关联)当且仅当 $B(X)$ 是一个可换(正定关联，关联)的 BCK- 代数. □

现在我们讨论弱关联性和关联性的本质区别.

定理 4.2.9(魏仕民，孟杰[1]) 弱关联 BCI- 代数必是 KL-积的.

证明 设 X 是一个弱关联 BCI- 代数，则对任意 $x, y \in X$，记

$$a = 0 * (0 * x) \in L(X).$$

对任意 $b \in L(X)$，记 $y = a * (0 * b)$. 则

$$\begin{aligned} y * x &= (a * (0 * b)) * x \\ &= (a * x) * (0 * b) \\ &= 0 * (0 * b) \\ &= b. \end{aligned}$$

由弱关联性得

$$\begin{aligned} x &= (x * (y * x)) * (0 * (y * x)) \\ &= (x * b) * (0 * b). \end{aligned}$$

由定理 4.1.3 和 4.2.4,X 是 KL- 积的. □

定理 4.2.10(魏仕民,孟杰[1])　设 X 是一个 KL- 积 BCI- 代数,则 X 是弱关联的当且仅当它是关联的.

证明　设 X 是 KL- 积的,则 $X \cong B(X) \times L(X)$. 假设 X 是关联的,则 $B(X)$ 是一个关联 BCK- 代数,因此 $B(X)$ 是弱正定关联的(定理 2.7.3),而 $L(X)$ 也是弱正关联的. 所以 X 是弱正关联的. □

上述两个定理揭示了关联性和弱关联性的本质不同.

4.3　结合部分

让我们给出一个较为一般的记号. 设 X 是一个 BCI- 代数,S 是 X 的一个子集合,记 $G(S) = \{x \in S : 0 * x = x\}$. 而 $G(X)$ 是所谓的 X 的结合部分,也称为 G- 部分. Y. B. Jun and E. H. Roh[2], J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[1] 较详细地讨论了 G- 部分.

定理 4.3.1(Y. B. Jun and E. H. Roh[2])　设 S 是 BCI- 代数 X 的一个子代数,则 $G(S)$ 是 X 的一个结合子代数,也是 $L(X)$ 的一个理想.

证明　注意 $G(S) = S \cap G(X)$. 我们首先证明 $G(X)$ 是一个结合子代数. 事实上 $\forall\ x, y \in G(X)$, $0 * x = x$ 和 $0 * y = y$. 因此

$$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y) = x * y.$$

所以 $G(X)$ 是 X 的一个结合子代数. 其次,$G(S)$ 是 $G(X)$ 的一个子

代数. 由子代数运算具有传递性知,$G(S)$ 是 X 的一个结合子代数. 由定理 2.2.12 知 $G(S)$ 是 $L(X)$ 的一个理想. □

例 4.3.1 设 $X=\{0,a,b\}$, $0*0=0*a=0$, $a*0=a$, $b*0=b$, $0*b=a*b=b$, $a*a=b*b=0$,则 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCI- 代数,X 是 X 的一个理想,但 $G(X)=\{0,b\}$ 不是 X 的一个理想,因为 $a*b=b\in G(X)$,$a\notin G(X)$.

由这个例子,我们自然希望讨论在什么条件下 $G(S)$ 是 X 的一个理想?下面所给结果的思想类似于节 4.1.

定理 4.3.2(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]) 设 S 是 BCI- 代数 X 的一个子代数,则下列条件等价:

(i) $G(S)$ 是 X 的一个理想;

(ii) $\forall\, x,y\in B(X)$ 和 $\forall\, a,b\in G(S)$,
$x*a=y*b$ 蕴涵 $x=y$ 和 $a=b$;

(iii) $\forall\, x,y\in B(X)$ 和 $\forall\, a\in G(S)$,
$x*a=y*a$ 蕴涵 $x=y$;

(iv) $\forall\, x\in B(X)$ 和 $\forall\, a\in G(S)$,
$x*a=0*a$ 蕴涵 $x=0$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $G(S)$ 是 X 的一个理想. 如果 $x,y\in B(X)$ 和 $a,b\in G(S)$ 满足 $x*a=y*b$,则

$$
\begin{aligned}
a &= 0*a \\
&= (0*x)*a \\
&= (0*x)*(0*a) \\
&= 0*(x*a) \\
&= 0*(y*b)
\end{aligned}
$$

$$= (0 * y) * (0 * b)$$
$$= 0 * b = b.$$

于是 $x * a = y * a$. 因此

$$(x * y) * a = (y * a) * y = 0 * a \in G(S).$$

由 (i) 得 $x * y \in G(S)$. 另一方面 $x * y \in B(X)$. 所以 $x * y = 0$. 类似地, $y * x = 0$. 因此 $x = y$. (ii) 成立.

(ii)⇒(iii)⇒(iv) 是平凡的.

(iv)⇒(i)　设 $x * b \in G(S)$ 和 $b \in G(S)$. 于是 $a_x * b = x * b$. 由此得

$$(x * a_x) * b = (x * b) * a_x = (a_x * b) * a_x = 0 * b.$$

注意 $x * a_x \in B(X)$, 由 (4) 得 $x * a_x = 0$, 即 $x = a_x \in L(X)$. 由定理 4.3.1, $G(S)$ 是 $L(X)$ 的一个理想, 所以 $x \in G(S)$. 这说明 $G(S)$ 是 X 的一个理想. □

这个定理可以改进为

定理 4.3.3(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[1])　设 S 是 BCI- 代数 X 的子代数, 则下列条件等价:

(i)　$G(S)$ 是 X 的一个理想;

(ii)　$\forall\, x, y \in X$ 和 $\forall\, a \in G(S)$,
$x * a = y * a$ 蕴涵 $x = y$;

(iii)　$\forall\, x \in X$ 和 $\forall\, a, b \in G(S)$,
$x * a = b * a$ 蕴涵 $x = b$;

(iv)　$\forall\, x \in X$ 和 $\forall\, a \in G(S)$,
$x * a = 0 * a$ 蕴涵 $x = 0$.

证明　设 (i) 成立, 且 $x * a = y * a$ 其中 $a \in G(S)$. 则

$$(x * y) * a = (x * a) * y$$

$$= (y * a) * y$$
$$= 0 * a \in G(S).$$

因此 $x * y \in G(S)$. 于是

$$\begin{aligned} x * y &= a * (a * (x * y)) \\ &= a * ((x * y) * a) \\ &= a * (0 * a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

同理可证 $y * x = 0$. 所以 $x = y$. (ii) 成立.

(ii)⇒(iii)⇒(iv) 是平凡的.

因定理 4.3.2(iv) 是定理 4.3.3(iv) 的特殊情形，由定理 4.3.2 知(iv)⇒(i). □

定理 4.3.4(J. Meng, Y. B. Jun and E. H. Roh[1]) 设 S 是 BCI-代数 X 的一个子代数，则 $G(S)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $\forall x \in X$ 和 $\forall b \in G(S)$.

(i) $x = (x * b) * (0 * b)$.

证明 设 $G(S)$ 是 X 的一个理想，$b \in G(S)$. 则

$$\begin{aligned} &(x * ((x * b) * (0 * b))) * b \\ &= (x * b) * ((x * b) * (0 * b)) \\ &= 0 * b. \end{aligned}$$

由定理 4.3.3(iv) 得

$$x * ((x * b) * (0 * b)) = 0.$$

直接计算知

$$((x * b) * (0 * b)) * x = 0.$$

所以 $x = (x * b) * (0 * b)$. (8) 成立.

相反地，假设(i) 成立. 如果 $x * b \in G(S)$ 和 $b \in G(S)$. 注意到 $0 * b \in G(S)$，我们有

$$x = (x * b) * (0 * b) \in G(S).$$

这说明 $G(S)$ 是 X 的一个理想. □

仿照定理 4.1.5 可以证明下述结果.

定理 4.3.5　设 S 是 BCI- 代数 X 的一个子代数. 则 $G(S)$ 是 X 的一个理想当且仅当 $\forall\ x,y \in X$ 和 $\forall\ a,b \in G(S)$

(i)　$(x * a) * (y * b) = (x * y) * (a * b)$. □

类似于节 4.1 还可以给出 $G(S)$ 是 X 的理想的其它等价条件. 留给读者.

4.4　H- 理想

我们在第 3 章已经看到 $B(X)$ 在理想理论中的重要作用. 例如 p- 理想就是包含 $B(X)$ 的理想，正理想是含于 $B(X)$ 的理想. 同样的 $L(X)$ 在理想理论中也占有重要地位. 例如正定关联理想和闭的(*)- 理想均包含 $L(X)$. 本节我们将讨论一类重要的理想——H- 理想，它同 $L(X)$ 的关系类似于正理想同 $B(X)$ 的关系. 在我们的研究中 $B(X)$ 和 $L(X)$ 在 BCI- 代数中所起的作用类似于纵轴和横轴在 2 维欧氏空间的作用.

本节和下节的概念和结果均引自 J. Meng，Y. B. Jun and E. H. Roh[2].

定义 4.4.1　BCI- 代数 X 的理想 I 叫做是一个 H- 理想 (horizontal ideal)，如果 $I \cap B(X) = \{0\}$.

显然$\{0\}$总是X的一个H-理想. 当$B(X)\neq\{0\}$时,$B(X)$不是H-理想. 如果$G(S)$是X的理想,则$G(S)$是一个H-理想. 因此H-理想较$G(S)$广.

我们感兴趣的是闭H-理想.

定理 4.4.2 设I是X的一个闭H-理想,则$I\subseteq L(X)$.

证明 设$x\in I$,则$a_x\in I$. 由I是闭的,因此$x*a_x\in I$. 另一方面$x*a_x\in B(X)$. 由$I\cap B(X)=\{0\}$得$x*a_x=0$,于是$x=a_x$,随之$x\in L(X)$. 所以$I\subseteq L(X)$. □

类似于节 4.1 的思想,我们给出H-理想的特征.

定理4.4.2 设I是$L(X)$的一个子代数,则I是X的一个H-理想,当且仅当$\forall x\in X$和$\forall a\in I$,

(i) $x=(x*a)(*(0*a)$.

证明 必要性 设$x\in X$和$a\in I$. 由于

$$\begin{aligned}&(x*((x*a)*(0*a)))*a\\&=(x*a)*((x*a)*(0*a))\\&=0*a\in I,\end{aligned}$$

我们有$x*((x*a)*(0*a))\in I$. 另一方面,

$$\begin{aligned}a_{x*((x*a)*(0*a))}&=a_x*((a_x*a_a)*(a_0*a_a))\\&=a_x*((a_x*a)*(0*a))\\&=a_x*((a_x*0)*(a*a))\\&=a_x*a_x\\&=0,\end{aligned}$$

这表明$x*((x*a)*(0*a))\in B(X)$. 因此

$$x*((x*a)*(0*a))\in I\cap B(X)=\{0\},$$

即 $x*((x*a)*(0*a))=0$. 显然$((x*a)*(0*a))*x=0$. 所以 $x=(x*a)*(0*a)$,(1) 成立.

充分性　取 $x*a\in I$ 和 $a\in I$. 由于 I 是 $L(X)$ 的一个子代数,我们有 $0*a\in I$,进一步 $x=(x*a)*(0*a)\in I$. 所以 I 是 X 的理想. 因为$I\subseteq L(X)$,所以 $I\cap B(X)=\{0\}$. 这就证明了 I 是 X 的一个 H- 理想. □

定理 4.4.3　设 I 是 $L(X)$ 的一个子代数,则下列条件等价:

(i)　I 是 X 的一个 H- 理想;

(ii)　$x*b=a*b$ 蕴涵 $x=a$,$\forall x\in X$,$\forall a,b\in I$;

(iii)　$x*a=0*a$ 蕴涵 $x=0$,$\forall x\in X$,$\forall a\in I$;

(iv)　$x*a=y*a$ 蕴涵 $x=y$,$\forall x,y\in X$,$\forall a\in I$;

(v)　$x*a=y*b$ 蕴涵 $x=y$ 和 $a=b$,$\forall x,y\in B(X)$,$\forall a,b\in I$;

(vi)　$x*a=y*a$ 蕴涵 $x=y$,$\forall x,y\in B(X)$,$\forall a\in I$;

(vii)　$x*a=0*a$ 蕴涵 $x=0$,$\forall x\in B(X)$,$\forall a\in I$;

(viii)　$(x*a)*(y*b)=(x*y)*(a*b)$,$\forall x,y\in X$,$\forall a,b\in I$.

证明　(i)⇒(ii)　设 $x\in X$ 和 $a,b\in I$ 且 $x*b=a*b$. 由于 I 是 $L(X)$ 的子代数,我们有 $a*b\in I$. 由此得 $x\in I$. 因此 $x\in L(X)$. 于是由定理 1.3.1,

$$\begin{aligned}x&=b*(b*x)\\&=b*(0*(x*b))\\&=b*(0*(a*b))\\&=b*(b*a)=a.\end{aligned}$$

(ii) 成立.

(ii)⇒(iii) 平凡的.

(iii)⇒(iv) 设 $x*a=y*a$ 其中 $x,y\in X$ 和 $a\in I$,则

$$\begin{aligned}(x*y)*a&=(x*a)*y\\&=(y*a)*y\\&=0*a.\end{aligned}$$

由(iii),$x*y=0$. 同法可证 $y*x=0$. 所以 $x=y$,(iv) 成立.

(iv)⇒(v) 设 $x*a=y*b$ 其中 $x,y\in B(X)$ 和 $a,b\in I$. 注意 $0*x=0*y=0$,则

$$\begin{aligned}a&=0*(0*a)\\&=(0*x)*(0*a)\\&=0*(x*a)\\&=0*(y*b)\\&=(0*y)*(0*b)\\&=0*(0*b)\\&=b.\end{aligned}$$

因此 $x*a=y*a$. 由(iv) 得 $x=y$. (v) 成立.

(v)⇒(vi)⇒(vii) 平凡的.

(vii)⇒(viii) 对 $x,y\in X$ 和 $a,b\in I$,

$$\begin{aligned}&(((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b)))*a\\=&(((x*a)*((x*a)*(y*b)))*y)*(a*b)\\\leqslant&((y*b)*y)*(a*b)\\=&(0*b)*(a*b)\\=&0*a.\end{aligned}$$

注意 $0*a\in L(X)$,我们有

$$(((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b)))*a=0*a.$$

容易看出 $((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b))\in B(X)$. 由(vii) 得

$$((x*y)*(a*b))*((x*a)*(y*b))=0.$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
&(((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b)))*(a*b)\\
&=(((x*(a*b))*((x*y)*(a*b)))*(y*b))*a\\
&\leqslant((x*(x*y))*(y*b))*a\\
&\leqslant(y*(y*b))*a\\
&\leqslant b*a\\
&=0*(a*b).
\end{aligned}
$$

因而$((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b))=0$,这儿利用了$a*b\in I$和$((x*a)*(y*b))*((x*y)*(a*b))\in B(X)$.所以我们有$(x*a)*(y*b)=(x*y)*(a*b)$.(viii)成立.

(viii)⇒定理 4.4.2(i)　对任意$x\in X$和$a\in I$,(viii)蕴涵

$$(x*a)*(0*a)=(x*0)*(a*a)=x.$$

由定理 4.4.2,I是X的一个H-理想,定理 4.4.2(i)成立. □

4.5　由 H-理想诱导的映射

设I是BCI-代数X的一个闭H-理想.在节 2.8,我们引入了符号R_a如下.对任意$a\in X$定义映射$R_a:X\to X$使得$R_a(x)=x*a,\forall x\in X$.记

$$R_I(X)=\{R_a:a\in I\}.$$

令$R_a\circ R_b$表示R_b与R_a的复合.

定理 4.5.1　$\langle R_I(X);\circ R_0\rangle$是一个阿贝尔群,且$R_I(X)$同构于$I$的伴随群.

证明　首先证明$R_I(X)$关于$\circ$是封闭的.取$a,b\in I$.对任意$x\in X$,由定理 4.4.2 得

$$R_a \circ R_b(x) = R_a(x * b)$$
$$= (x * b) * a$$
$$= (x * b) * (0 * (0 * a))$$
$$= (x * 0) * (b * (0 * a))$$
$$= x * (a * (0 * b))$$
$$= R_{a*(0*b)}(x)$$
$$= R_{a+b}(x);$$

由于 $a + b \in I$,所以 $R_I(x)$ 关于 $\circ$ 是封闭的. 上述证明中得到

(1) $R_a \circ R_b = R_{a+b}, \forall\ a,b \in I.$

其次容易验证 $\langle R_I(X);\ \circ, R_0\rangle$ 是一个阿贝尔群,其单位元为 R_0.

值得注意的是 R_{0*a} 是 R_a 的逆元. 事实上,

$$R_a \circ R_{0*a} = R_{a*(0*(0*a))}$$
$$= R_{a*a}$$
$$= R_0.$$

由此得 $R_a - R_b = R_a + R_{0*b} = R_{a*(0*(0*b))} = R_{a*b}$.

最后证明 $R_I(X)$ 同构于 I 的伴随群. 令 $f: I \to R_I(X)$ 使得 $f(a) = R_a, \forall\ a \in I$. 因为 $\forall\ a,b \in I$,

$$f(a + b) = R_{a+b} = R_a \circ R_b = f(a) \circ f(b),$$

所以 f 是一个同态映射. 如果 $f(a) = R_0$,则 $\forall\ x \in X, f(a)(x) = R_0(x) = x$,即 $x * a = x$. 因此

$$0 * a = (x * a) * x = 0,$$

即 $a = 0$. 这表明 $f^{-1}(R_0) = \{0\}$. 所以 f 是一个单射. 显然 f 是满射. 于是 f 是一个同构映射. 这就证明了 $\langle R_I(X);\ \circ, R_0\rangle$ 同构于 I 的伴随群. □

推论 4.5.2 设 I 是 BCI- 代数 X 的一个闭的 H- 理想,则 $\langle R_I(X);\ -, R_0\rangle$(这儿 $R_a - R_b = R_{a+b}$)是一个 p- 半单 BCI- 代数,

且同构于 p- 半单 BCI- 代数 I.

证明　仅需注意在定理 4.5.1 证明中的 f 有下述性质：

$$\forall a,b \in I, f(a * b) = R_{a*b} = R_a - R_b.$$ □

在节 4.1 我们引进了映射 p，并用它给出了 $L(X)$ 是理想的条件. 现在，我们将用 p 给出 H- 理想的条件. 对闭 H- 理想，记 $S_I = \bigcup \{V(a): a \in I\}$.

定理 4.5.3　设 I 是 X 的一个闭 H- 理想，则 p 是 S_I 上的一个自同态.

证明　对任意 $x, y \in S_I$，我们有 $a_x, a_y \in I$. 由定理 4.4.3(viii)，

$$\begin{aligned} p(x * y) &= (x * y) * a_{x*y} \\ &= (x * y) * (a_x * a_y) \\ &= (x * a_x) * (y * a_y) \\ &= p(x) * p(y). \end{aligned}$$

所以 p 是 S_I 上的一个自同态. □

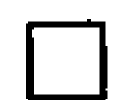
这个定理的逆也成立.

定理 4.5.4　设 S 是 X 的一个子代数，且 $B(X) \subseteq S$. 如果 p 是 S 上的一个自同态，则 $L(S)$ 是 X 的一个 H- 理想.

证明　取 $x, y \in B(X)$ 和 $a \in L(S)$，则 $a_x = a_y = 0$ 和 $a_a = a$. 因此 $p(x) = x, p(y) = y$ 和 $p(a) = 0$. 如果 $x * a = y * a$，则

$$x = p(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= p(x) * p(a) \\
&= p(x * a) \\
&= p(y * a) \\
&= p(y) * p(a) \\
&= y * 0 \\
&= y.
\end{aligned}
$$

由定理 4.4.3(vi) 知 $L(S)$ 是 X 的一个 H- 理想. 

第 5 章　BCI- 代数的扩张

为了构造新的 BCI- 代数，给一个 BCI- 代数增添新的元素是一个行之有效的方法. 在这一章，我们介绍几种扩张 BCI- 代数的方法，希望能有助于读者的进一步研究.

5.1　简单扩张

1980 年，K. Iséki[3] 给出了由一个 BCK- 代数出发增添一点来构造 BCI- 代数，这就是一点扩张.

定理 5.1.1　假设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCK- 代数，$a \notin X$. 对任何 $x \in X$，令

$$x * a = a * x = a, a * a = 0,$$

则 $\langle X \cup \{a\}, *, 0\rangle$ 是一个真 BCI- 代数.

这是定理 1.1.6，故不再证明.　□

1990 年，C. S. Hoo[4] 推广了 Iséki 方法，给出了另一个扩张方法，这就是

定理 5.1.2　设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCK- 代数，$\langle Y; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数，$X \cap Y = \{0\}$. 则 $\langle X \cup Y; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，使得 $B(X \cup Y) = X, L(X \cup Y) = Y$，当且仅当对任意 $x \in$

X 和 $y \in Y$，$x * y = 0 * y$，$y * x = y$.

证明 必要性 假设 $\langle X \cup Y; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数，使得 $B(X \cup Y) = X$ 和 $L(X \cup Y) = Y$. 取 $x \in X$ 和 $y \in Y$. 因为 x 和 0 属于同一个分支 $B(X \cup Y)$，我们有 $x * y$ 和 $0 * y$ 也属于同一个分支，而 $0 * y$ 就是一个原子，因此 $x * y \in V(0 * y)$. 由于 $\langle Y; *, 0\rangle$ 是 p-半单的，则 $V(0 * y) = \{0 * y\}$，所以 $x * y \in \{0, y\}$，$x * y = 0 * y$.

因为 y 是一个原子，且 $(y * x) * y = 0 * x = 0$，所以 $y * x = y$. "仅当"部分得证.

充分性 假设对任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$，$x * y = 0 * y$ 和 $y * x = y$. 为了证明 $\langle X \cup Y; *, 0\rangle$ 是一个BCI-代数，由定理1.1.6，仅需验证 BCI-1 成立. 分下述情形进行：

(1) 如果 $x, y \in X$ 和 $z \in Y$，则

$$\begin{aligned}((x * y) * (x * z)) * (z * y) &= ((x * y) * (0 * z)) * z \\ &= (0 * (0 * z)) * z \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2) 如果 $x \in X$ 和 $y, z \in Y$，则

$$\begin{aligned}&((x * y) * (x * z)) * (z * y) \\ &= ((0 * y) * (0 *)) * (z * y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(3) 如果 $x, z \in X$ 和 $y \in Y$，则

$$\begin{aligned}&((x * y) * (x * z)) * (z * y) \\ &= ((0 * y) * (x * z)) * (0 * y) \\ &= (0 * y) * (0 * y) = 0.\end{aligned}$$

(4) 如果 $x \in Y$ 和 $y, z \in X$，则

$$\begin{aligned}&((x * y) * (x * z)) * (z * y) \\ &= (x * x) * (z * y)\end{aligned}$$

$= 0 * (z * y) = 0.$

(5)　如果 $x, z \in Y$ 和 $y \in X$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y) = (x * (x * z)) * z = 0.$$

(6)　如果 $x, y \in Y$ 和 $z \in X$，则

$$\begin{aligned}&((x * y) * (x * z)) * (z * y)\\ &= ((x * y) * x) * (0 * y)\\ &= (0 * y) * (0 * y) = 0.\end{aligned}$$

所以 $\langle X \cup Y; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. $B(X \cup Y) = X$ 和 $L(X \cup Y) = Y$ 是易于验证的，故省略. □

这个定理的“仅当”部分由 J. Meng 和 Y. B. Jun[3] 给出.

当令 $Y = \{0, a\}$ 且 $a * 0 = 0 * a = 0, a * a = 0 * 0 = 0$ 时，$\langle Y; *, 0\rangle$ 是一个 p- 半单 BCI- 代数. 由定理 5.1.2 所得的 BCI- 代数恰好就是 Iséki 的一点扩张. 所以定理 5.1.2 是 Iséki 扩张的推广. 定理 5.1.2 所给的扩张称作简单扩张，它的乘法表容易给出.

5.2　较复杂扩张

早在 1984 年，X. Li[1] 就给出了一种方法，由一个 BCK- 代数和一个 BCI- 代数作并而得到一个 BCI- 代数，其结果比定理 5.1.2 更普遍. 下面来叙述这一结果.

定理 5.2.1　设 $\langle X_1; *_1, 0\rangle$ 是一个 BCK- 代数，$\langle X_2; *_2, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数，且 $X_1 \cap X_2 = \{0\}$，定义 $X = X_1 \cup X_2$ 上的二元运算 $*$ 如下：

$$x*y=\begin{cases}x*_1y, & \text{当 } x,y\in X_1 \text{ 时;}\\ x*_2y, & \text{当 } x,y\in X_2 \text{ 时;}\\ x, & \text{当 } x\in X_2, y\in X_1 \text{ 时;}\\ 0*_2y, & \text{当 } x\in X_1, y\in X_2 \text{ 时;}\end{cases}$$

则$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI-代数. □

细心的读者不难看出定理 5.1.2 和定理 5.2.1 中在 X 上定义运算 $*$ 的方法是相同的，而且定理 5.1.2 中“当”部分的证明方法完全适用于定理 5.2.1，故我们不再给出证明.

1994 年，魏仕民[2] 给出了另一个作 BCK-代数与 BCI-代数之并代数的方法，我们称为 *KI*-并代数.

定理 5.2.2 设$\langle X_1;*_1,0\rangle$是一个 BCK-代数，$\langle X_2;*_2,0\rangle$是一个 BCI-代数，$X_1\cap X_2=\{0\}$，在 $X=X_1\cup X_2$ 上定义二元运算 $*$ 如下：

$$x*y=\begin{cases}x*_1y, & \text{当 } x,y\in X_1 \text{ 时;}\\ x*_2y, & \text{当 } x,y\in X_2 \text{ 时;}\\ x, & \text{当 } x\in X_2, y\in X_1, \\ & \text{或者 } x\in X_1, y\in B(X_2) \text{ 时;}\\ 0*_2y, & \text{当 } x\in X_1, y\in L(X_2) \text{ 时;}\end{cases}$$

则$\langle X;*,0\rangle$是一个 BCI-代数.

证明 由定理 1.1.6，仅需验证 BCI-1 在 X 上成立. 对于 $x,y,z\in X_1$ 或者 $x,y,z\in X_2$ 时，验证是平凡的. 所以我们仅对下列情形验证.

(1) 当 $x\in X_1$，$y,z\in X_2$ 时，又分为四种情形：

如果 $y,z\in B(X_2)$，则

$((x*y)*(x*z))*(z*y)$

$$= (x *_1 x) * (z *_2 y)$$
$$= 0 *_2 (z *_2 y) = 0;$$

如果 $y, z \in L(X_2)$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((0 *_2 y) * (0 *_2 y)) *_2 (z *_2 y)$$
$$= 0;$$

如果 $y \in B(X_2), z \in L(X_2)$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= (x * (0 *_2 z)) * (z *_2 y)$$
$$= (0 *_2 (0 *_2 z)) * (z *_2 y)$$
$$= ((0 *_2 y) *_2 (0 *_2 z)) *_2 (z *_2 y)$$
$$= 0;$$

如果 $y \in L(X_2), z \in B(X_2)$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((0 *_2 y) * x) * (z *_2 y)$$
$$= (0 *_2 y) *_2 (z *_2 y)$$
$$= ((0 *_2 y) *_2 (0 *_2 z)) *_2 (z *_2 y) = 0.$$

(2)　当 $x, y \in X_1, z \in X_2$ 时，分下述两种情形：

如果 $z \in B(X_2)$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((x *_1 y) *_1 x) * z$$
$$= 0 *_2 z = 0;$$

如果 $z \in L(X_2)$，则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((x *_1 y) * (0 *_2 z)) * z$$
$$= (0 *_2 (0 *_2 z)) *_2 z = 0.$$

(3)　当 $x, z \in X_1, y \in X_2$ 时，分下述两种情形：

如果 $y \in B(X_2)$，则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=(x*_1(x*_1z))*_1z=0;$$

如果 $y\in L(X_2)$,则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=((0*_2y)*(x*_1z))*(0*_2y)$$
$$=(0*_2y)*_2(0*_2y)=0.$$

(4)　当 $x\in X_2$ 时,分下述四种情形:

如果 $y,z\in X_1$,则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=(x*x)*(z*_1y)$$
$$=0*_1(z*_1y)=0;$$

如果 $y\in X_1,z\in X_2$,则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=(x*_2(x*_2z))*_2z=0;$$

如果 $y\in B(X_2),z\in X_1$,则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=((x*_2y)*_2x)*z$$
$$=(0*_2y)*z$$
$$=0*_1z=0;$$

如果 $y\in L(X_2),z\in X_1$,则

$$((x*y)*(x*z))*(z*y)$$
$$=((x*_2y)*_2(x*_20))*_2(0*_2y)$$
$$=0.$$

因此 $\langle X;*,0\rangle$ 满足 BCI-1. 所以它是一个 BCI- 代数.　□

最后,我们给出 BCI- 代数的 p- 半单并(见 S. M. Wei, Y. B. Jun and J. Meng[1]).

定理 5.2.3　假设$\langle X_i;*_i,0\rangle(i\in I)$是一族BCI-代数,满足$L(X_i)=\bigcap_{i\in I}X_i,\forall\, i\in I$;并且对任意$x,y\in X_i\cap X_j$有$x*_iy=x*_jy$.在$X=\bigcup_{i\in I}X_i$上定义二元运算$*$如下:

(i)　如果$x,y\in X_i$,定义$x*y=x*_iy$;

(ii)　如果$x\in X_i-\bigcap_{i\in I}X_i,y\in X_j\in X_j-\bigcap_{i\in I}X_i(i\neq j)$,定义

$$x*y=x*_i(0*_j(0*_jy)).$$

则$\langle X;*,0\rangle$是一个BCI-代数.

证明　首先我们说明下式

$$x*y=x*_i(0*_j(0*_jy)),\forall\, x\in X_i,y\in X_j(i\neq j)$$

成立.事实上,如果$x\in X_i,y\in\bigcap_{i\in I}X_i$,则

$$x*y=x*_iy=x*_i(0*_j(0*_jy))$$

这儿利用了$y=0*_j(0*_jy)$;如果$x\in\bigcap_{i\in I}X_i,y\in X_j$,则

$$\begin{aligned}x*y&=x*_jy\\&=x*_j(0*_j(0*_jy))\\&=x*_i(0*_j(0*_jy))\end{aligned}$$

这儿利用了推论1.3.5;如果$x\in X_i-\bigcap_{i\in I}X_i,y\in X_j-\bigcap_{i\in I}X_i$,结论显然.

现在我们仅需验证$\langle X;*,0\rangle$满足BCI-1.设$x\in X_i,y\in X_j$,$z\in X_k$,分以下情形进行.

(1)　如果$i\neq j\neq k\neq i$,则

$$\begin{aligned}&((x*y)*(x*z))*(z*y)\\&=((x*_i(0*_j(0*_jy)))*_i(x*_i(0*_k(0*_kz))))*_i\\&\qquad(0*_k(0*_k(z*_k(0*_j(0*_jy)))))\\&=((x*_i(0*_j(0*_jy)))*_i(x*_i(0*_k(0*_kz))))*_i\\&\qquad((0*_k(0*_kz))*_i(0*_j(0*_jy)))\\&=0.\end{aligned}$$

(2)　如果 $i \neq j \neq k$,则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((x *_i y) *_i (x *_i (0 *_k (0 *_k z)))) *_i (0 *_k (0 *_k (z *_k (0 *_i (0 *_i y)))))$$
$$= ((x *_i y) *_i (x *_i (0 *_k (0 *_k z)))) *_i ((0 *_k (0 *_k z)) *_i y)$$
$$= 0.$$

(3)　如果 $i \neq j \neq k$,则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((x *_i (0 *_j (0 *_j y))) *_i (x *_i (0 *_j (0 *_j z)))) *_i (0 *_j (0 *_j (z *_j y)))$$
$$= ((x *_i (0 *_j (0 *_j y))) *_i (x *_i (0 *_j (0 *_j z)))) *_i ((0 *_j (0 *_j z)) *_i (0 *_j (0 *_j y)))$$
$$= 0.$$

(4)　如果 $k \neq i \neq j$,则

$$((x * y) * (x * z)) * (z * y)$$
$$= ((x *_i (0 *_j (0 *_j y))) *_i (x *_i z)) *_i (z *_i (0 *_j (0 *_j y)))$$
$$= 0.$$

(5)　如果 $i = j = k$,则 BCI-1 显然成立.

所以 $\langle X; *, 0\rangle$ 是一个 BCI- 代数. □

5.3　3 ～ 6 阶的真 BCI- 代数

首先我们列出 2 ～ 6 阶 p- 半单 BCI- 代数:

*	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

*	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

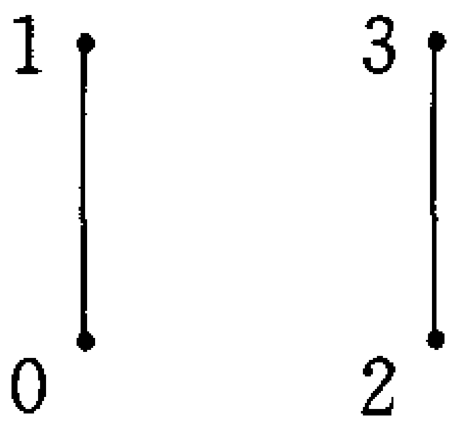
*	0	1	2	3	4	5
0	0	5	4	3	2	1
1	1	0	5	4	3	2
2	2	1	0	5	4	3
3	3	2	1	0	5	4
4	4	3	2	1	0	5
5	5	4	3	2	1	0

由定理 5.1.2,我们知道简单扩张成的 BCI- 代数乘法表是容易构造的,故我们略去它们. 下面我们仅列出非简单扩张的 BCI-代数表.

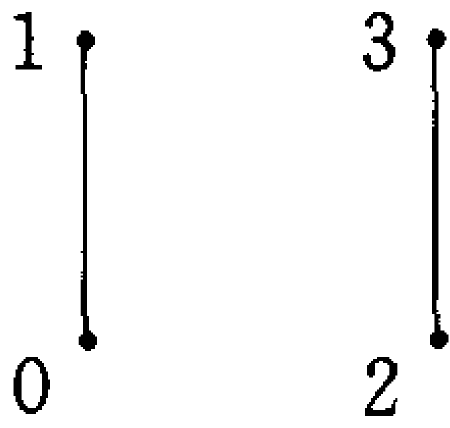
3 阶真 BCI- 代数仅有一个 Iséki 扩张和 p- 半单 BCI- 代数,所以不存在非简单扩张的 BCI- 代数.

4 阶非简单扩张的 BCI- 代数仅有两个,其乘法表和序关系图如下:

*	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	2	2
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

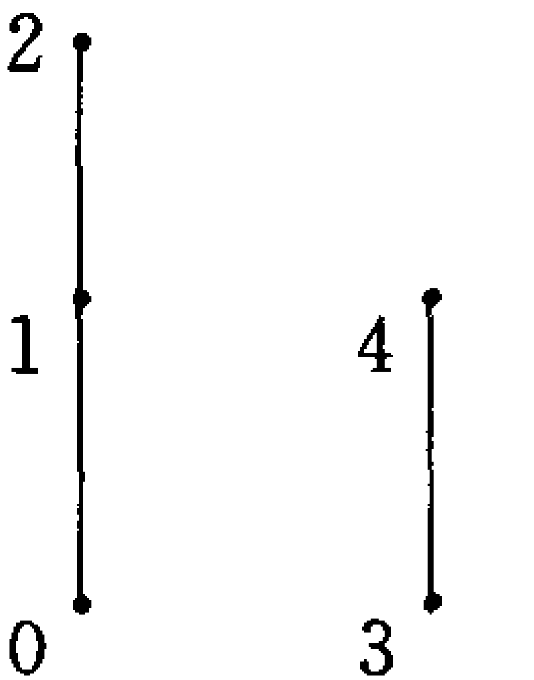


*	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	3	2	1	0

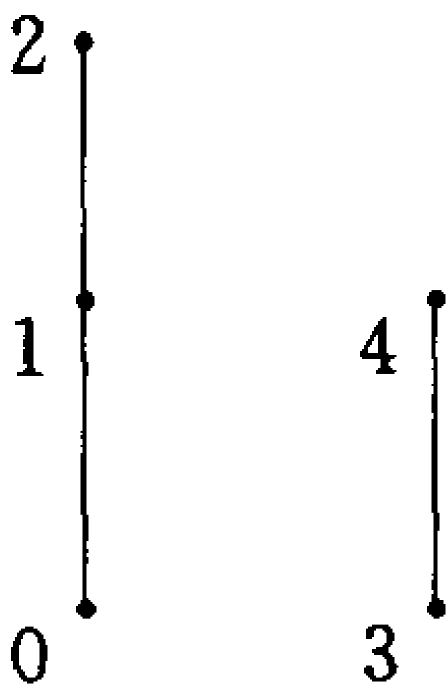


5 阶非简单扩张的 BCI- 代数有 8 个,乘法表和序关系图如下:

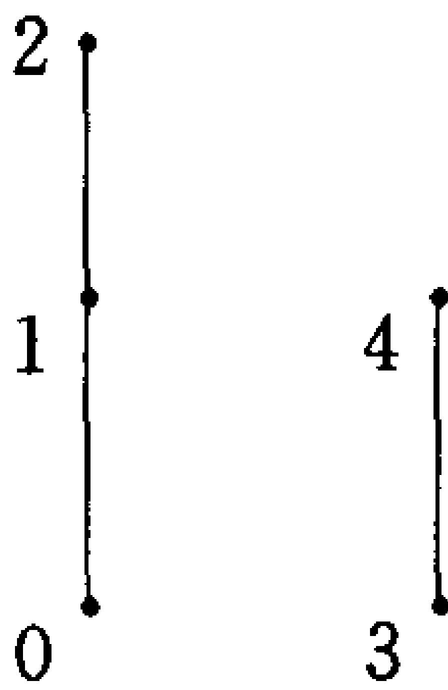
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	0	3	3
2	2	1	0	4	3
3	3	3	3	0	0
4	4	3	3	1	0



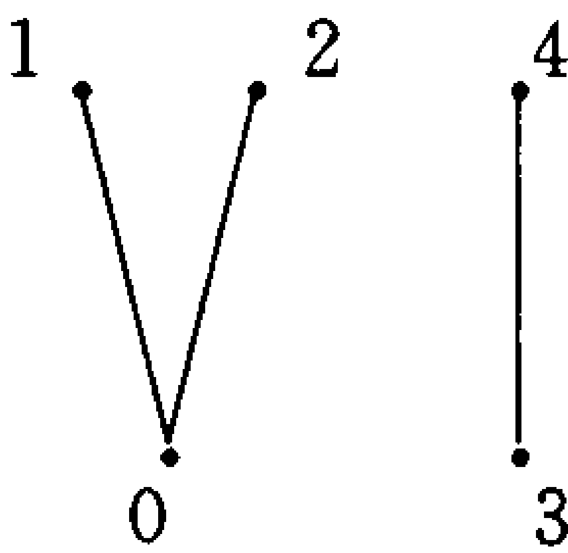
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	0	3	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	3	3	1	0



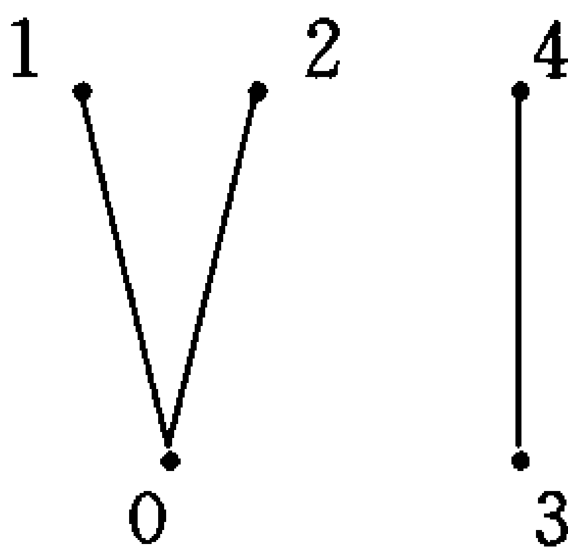
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	0	3	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	3	3	1	0



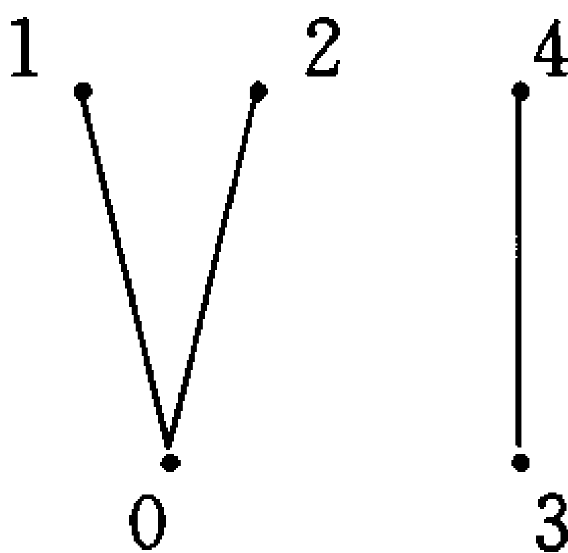
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	1	3	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0



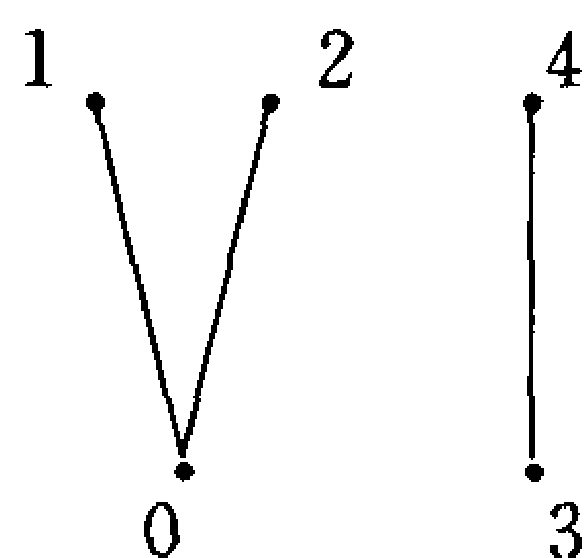
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	1	3	3
2	2	2	0	4	3
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0



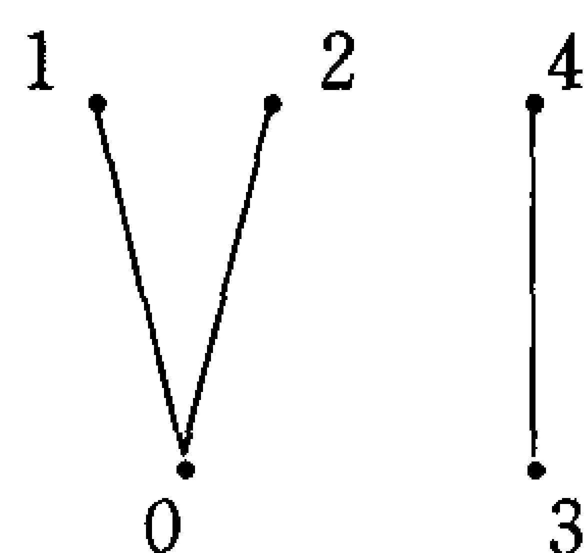
*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	1	3	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	1	0



*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	1	4	3
2	2	2	0	3	3
3	3	3	3	0	0
4	4	3	4	1	0

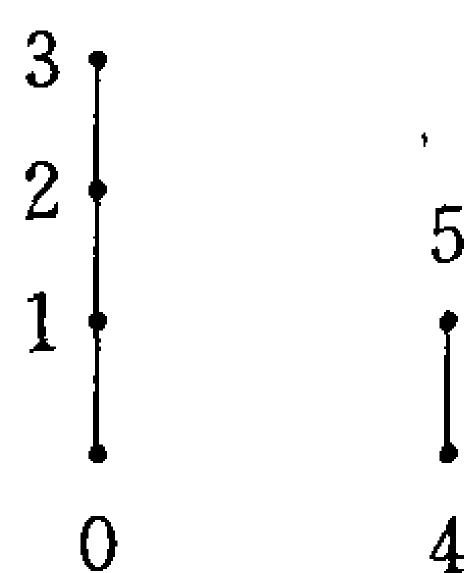


*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	3	3
1	1	0	1	3	3
2	2	2	0	4	3
3	3	3	3	0	0
4	4	4	3	2	0

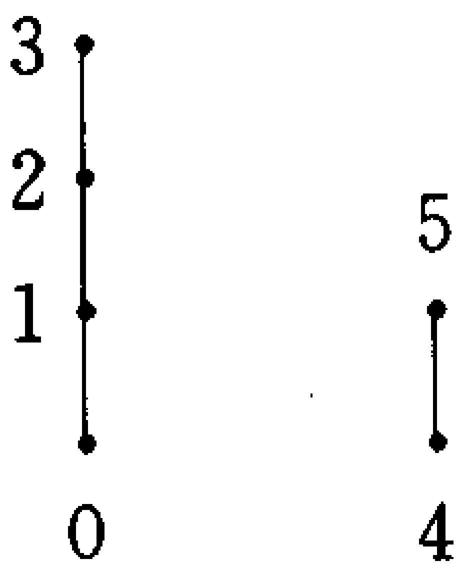


6 阶非简单扩张 BCI- 代数有 69 个，其乘法表和序关系图如下：

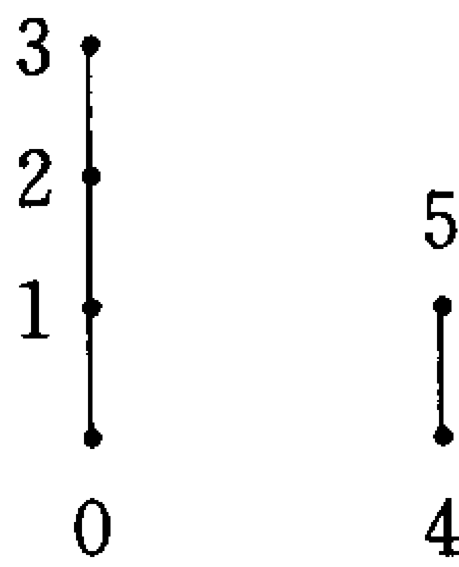
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	5	4
3	3	1	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



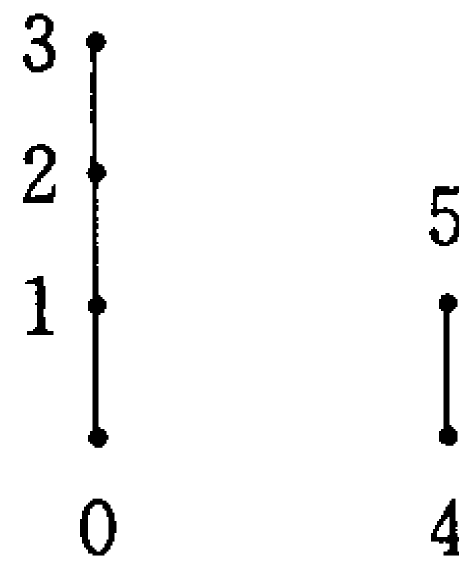
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	1	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



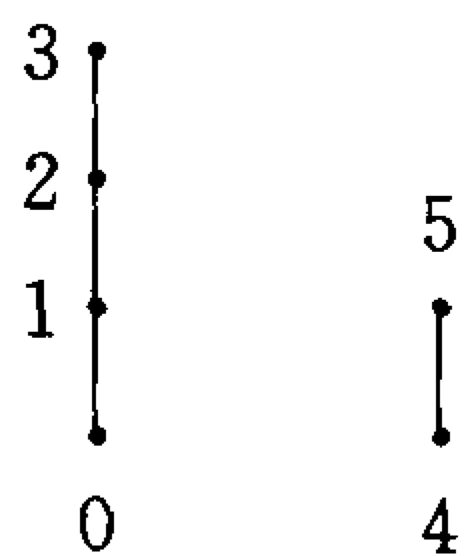
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	1	1	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



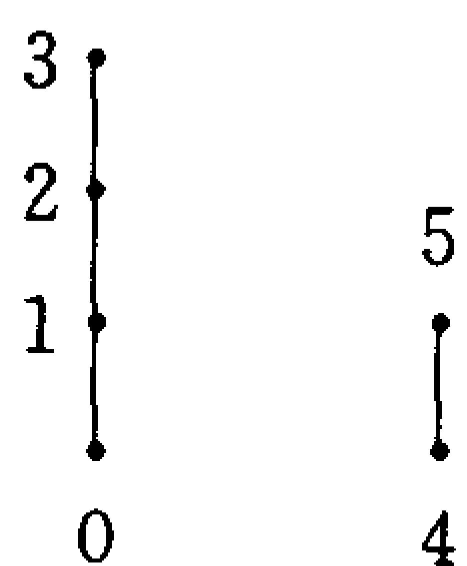
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	2	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



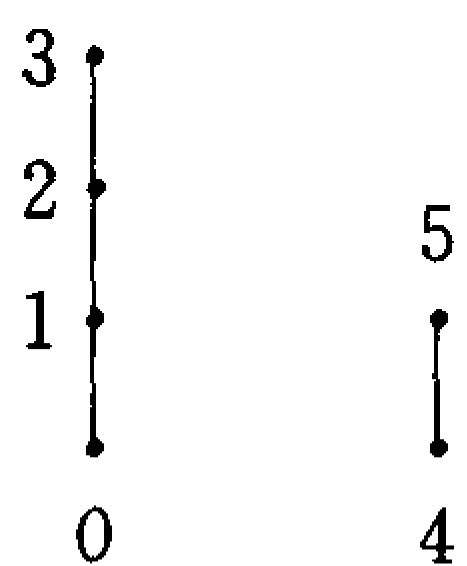
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	2	1	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



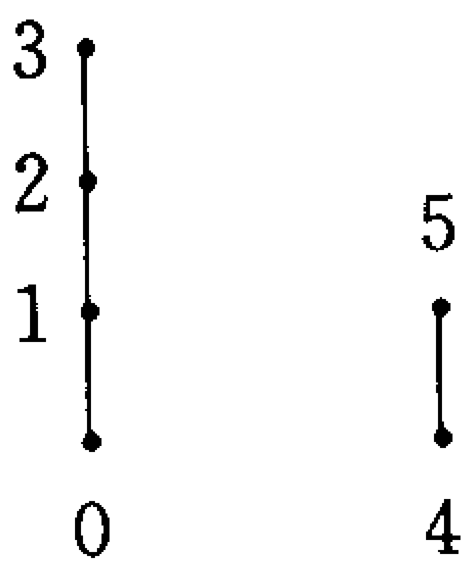
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	2	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



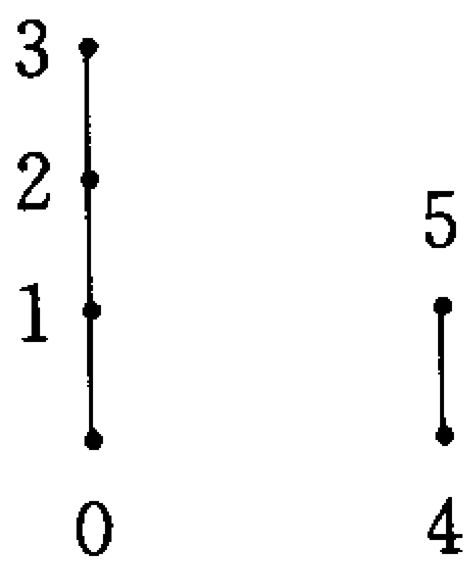
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	2	1	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



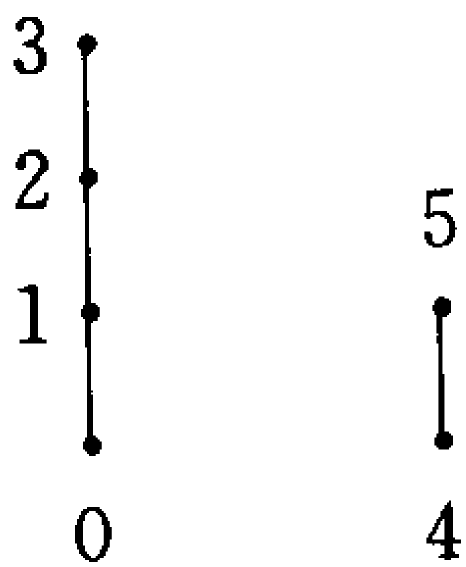
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	2	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	4	4	2	0



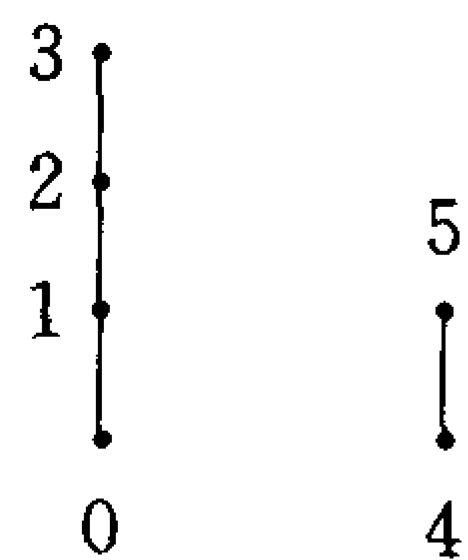
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	2	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	4	4	2	0



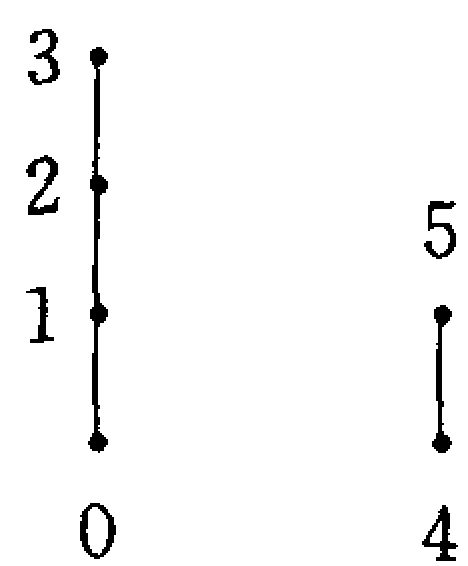
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	2	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



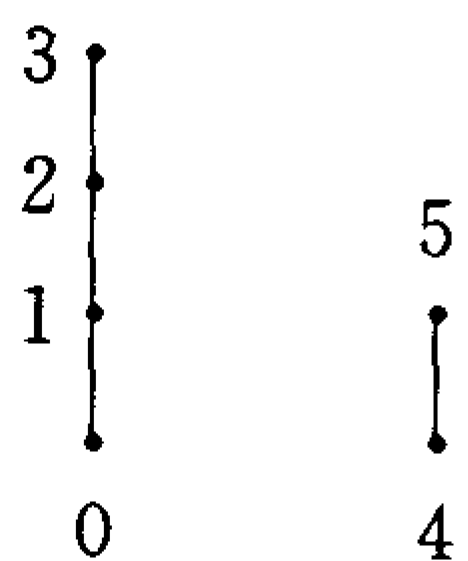
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



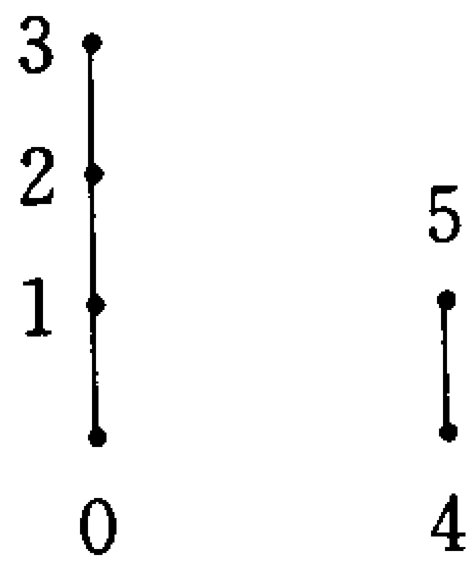
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	0	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



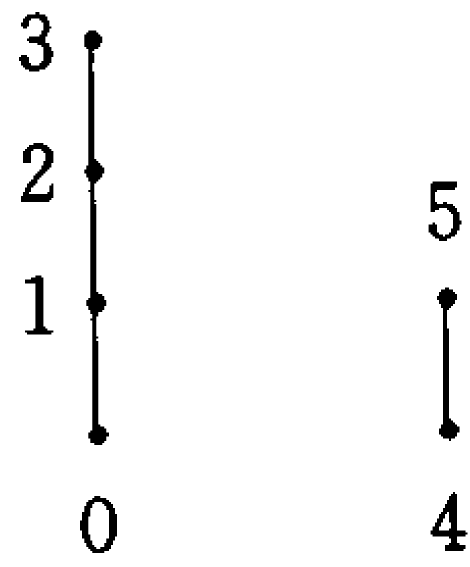
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



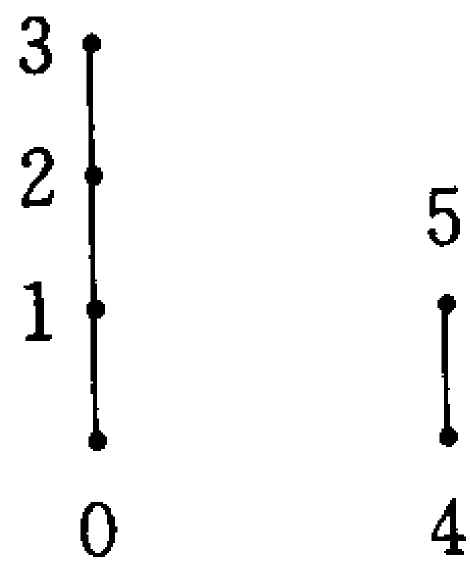
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



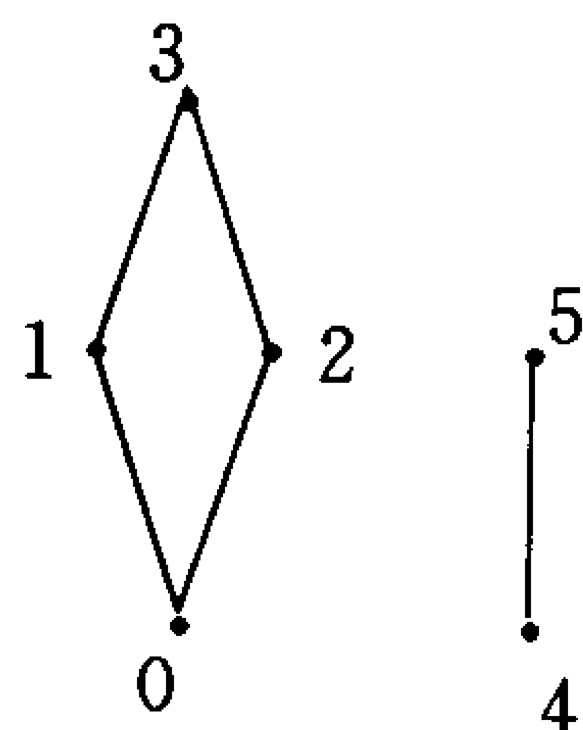
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	2	0



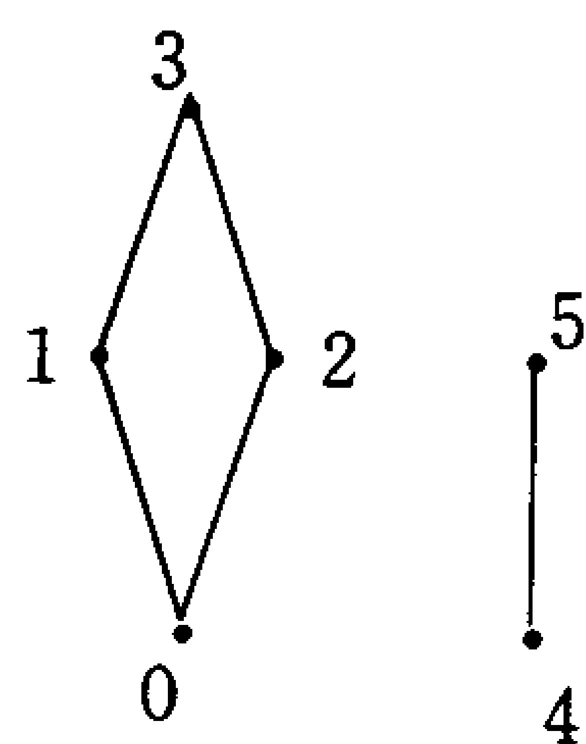
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



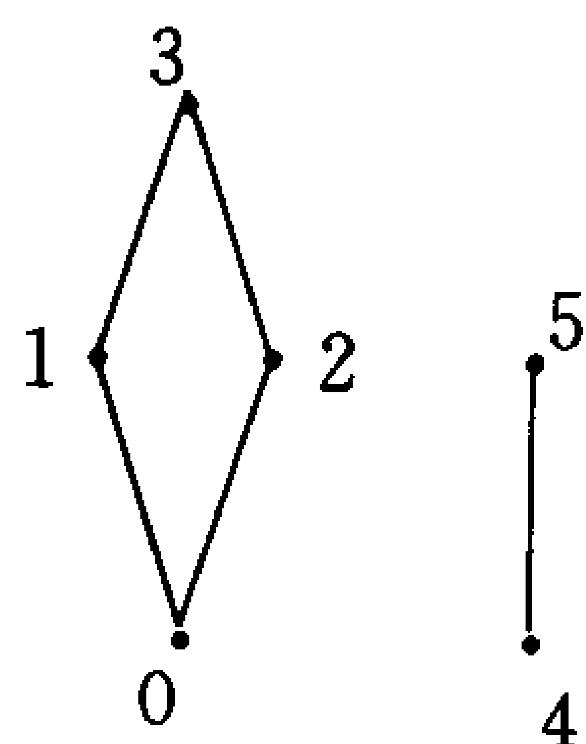
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	1	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	2	1	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	5	4	1	0



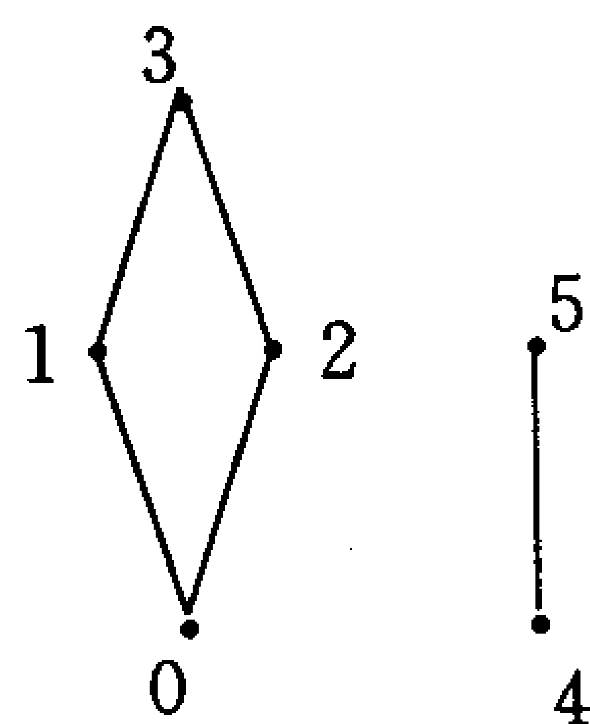
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	1	0	5	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	2	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	5	4	1	0



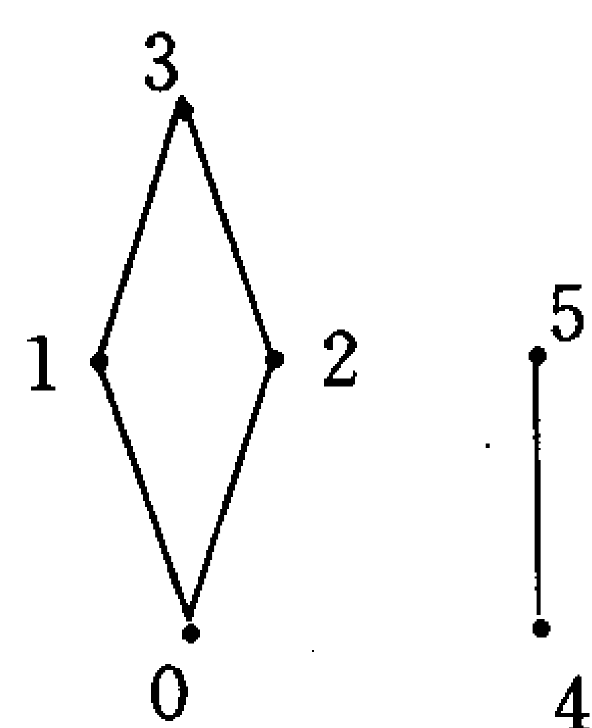
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	1	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	5	4	1	0



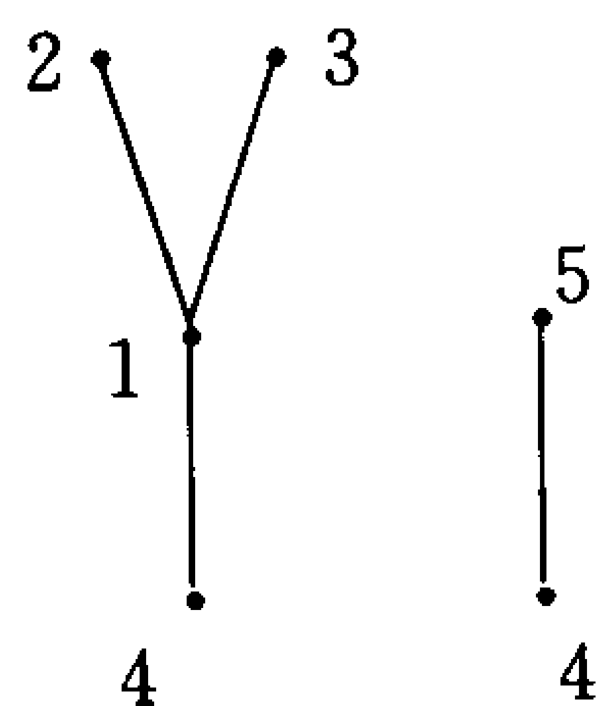
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	1	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



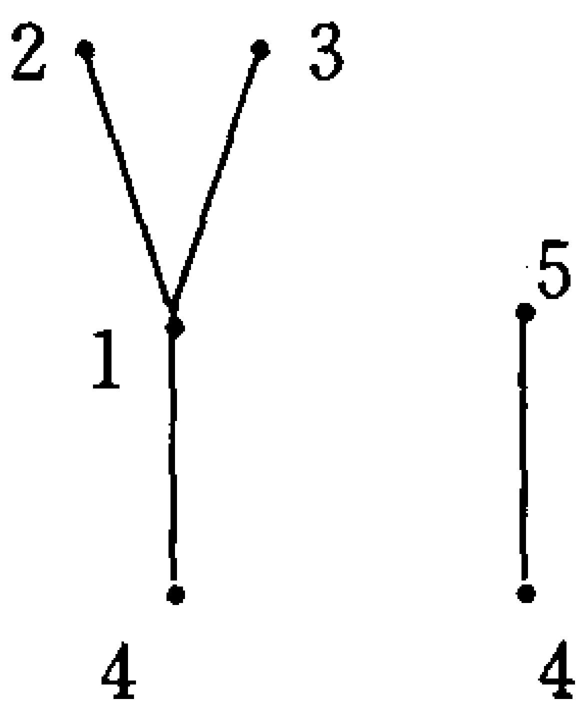
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	1	0	4	4
2	2	2	0	0	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



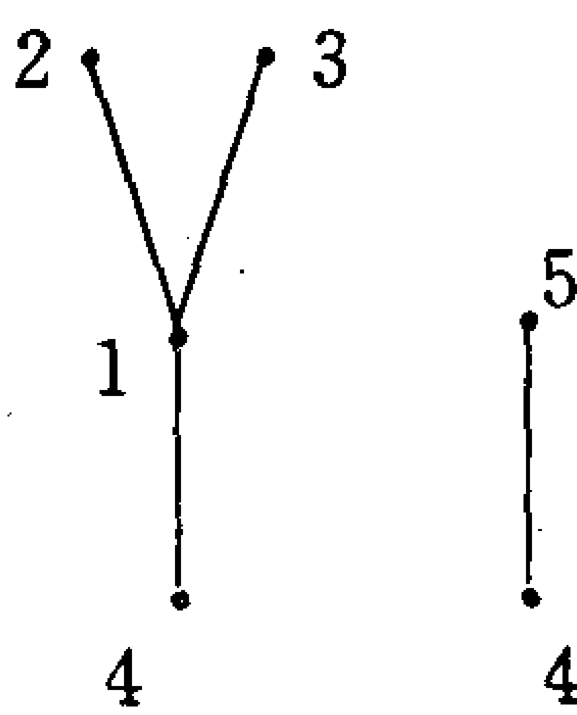
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	5	4
3	3	1	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



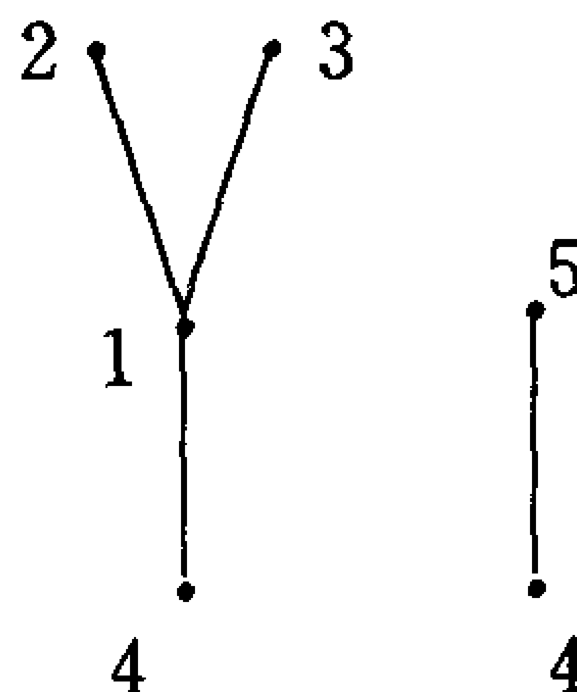
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	4	4
3	3	1	1	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



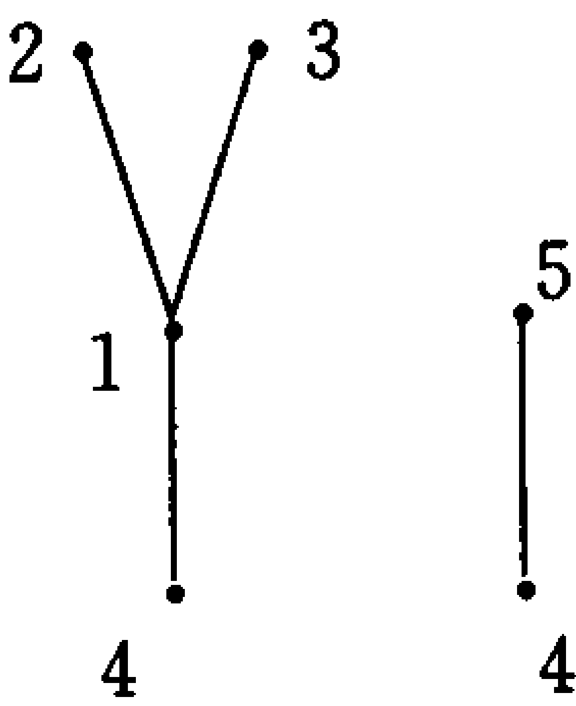
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	4	4
3	3	1	1	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



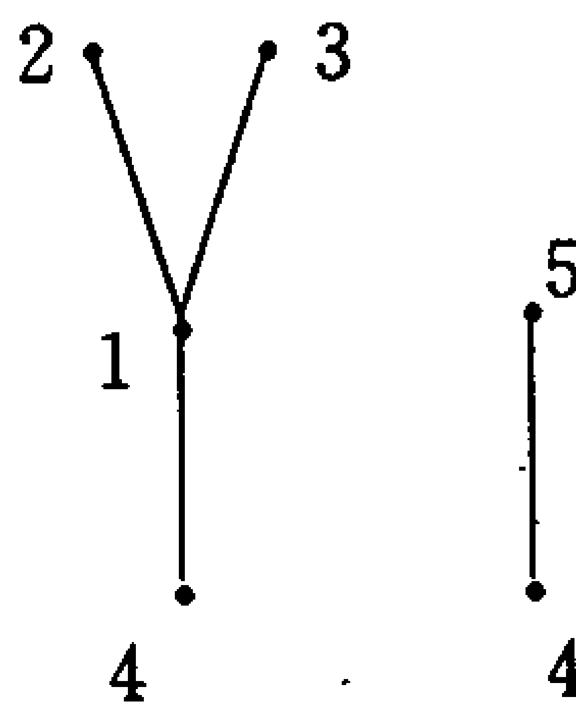
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



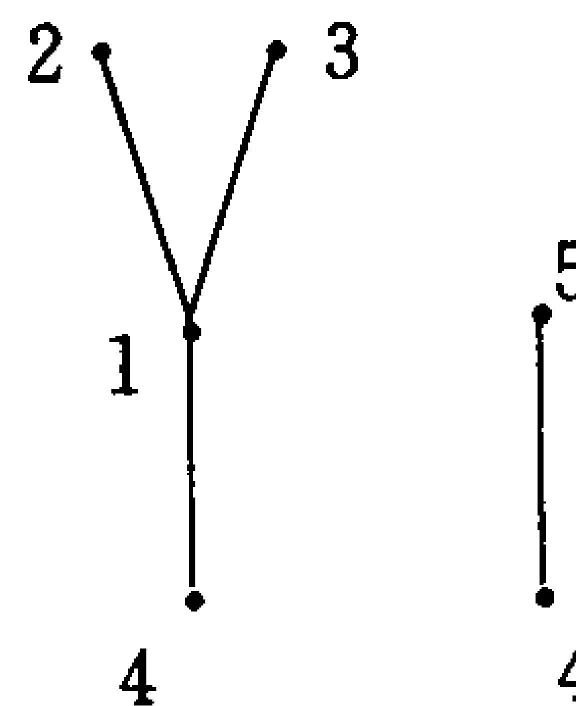
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



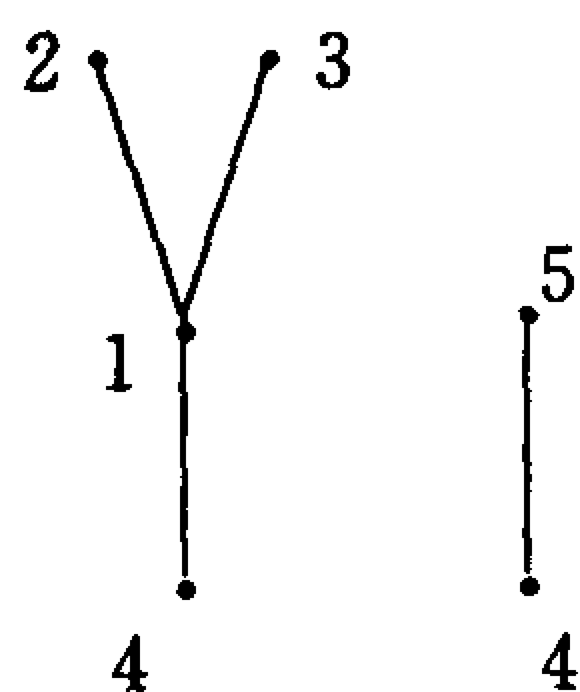
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	1	0	1	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



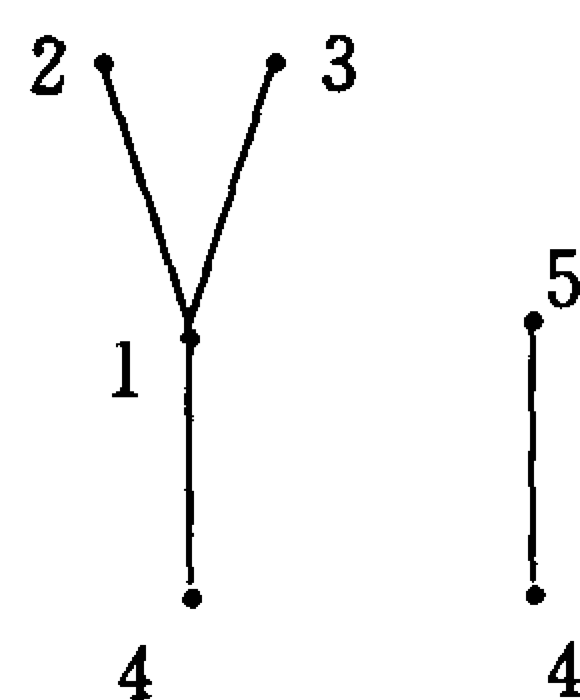
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



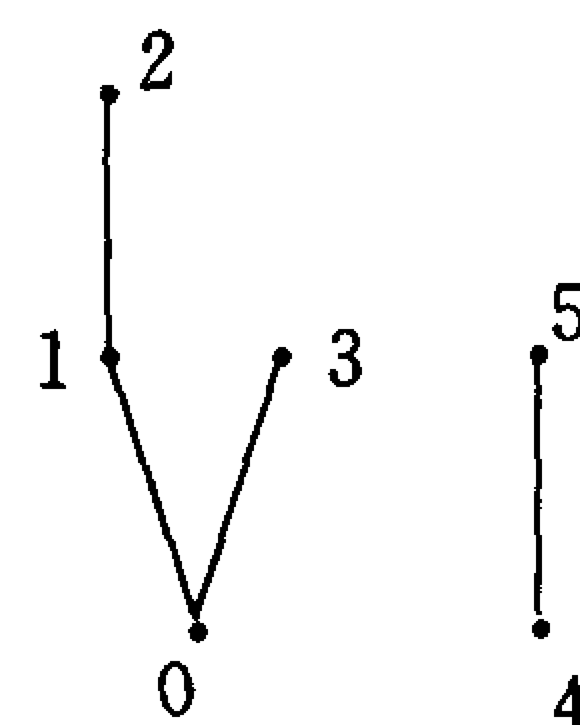
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	2	5	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



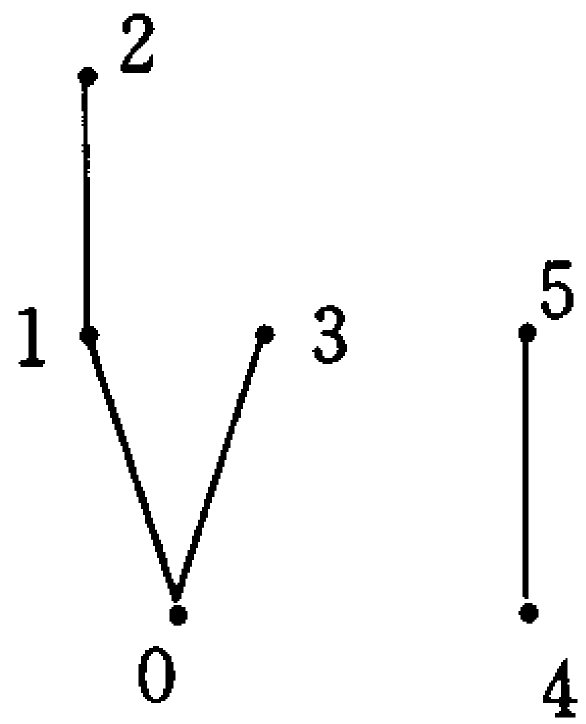
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	0	4	4
2	2	2	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	4	1	0



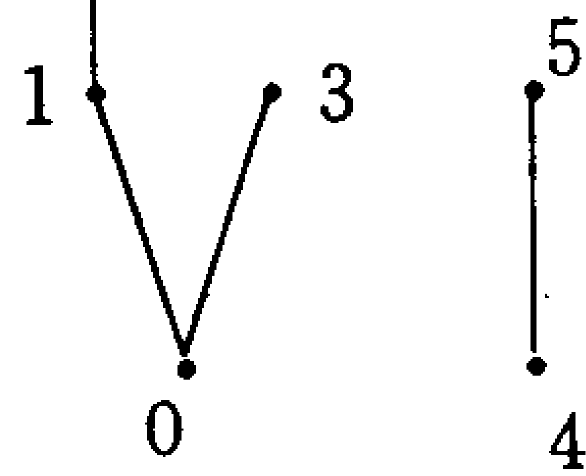
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	1	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	5	1	0



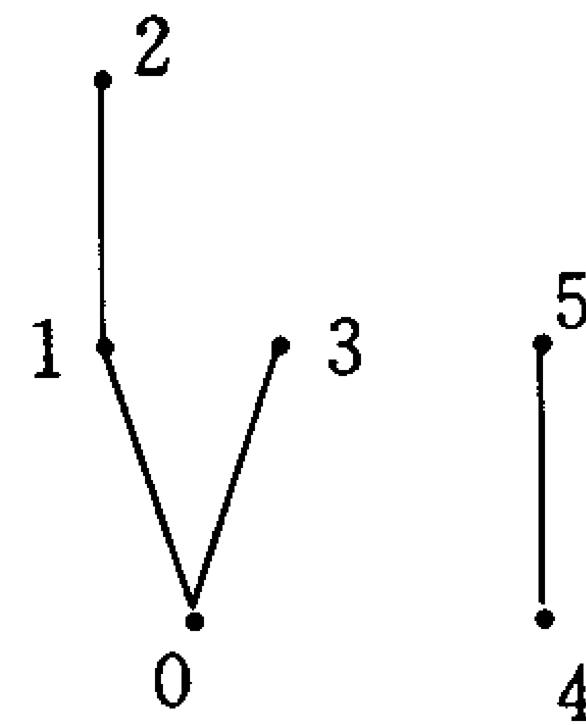
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	1	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



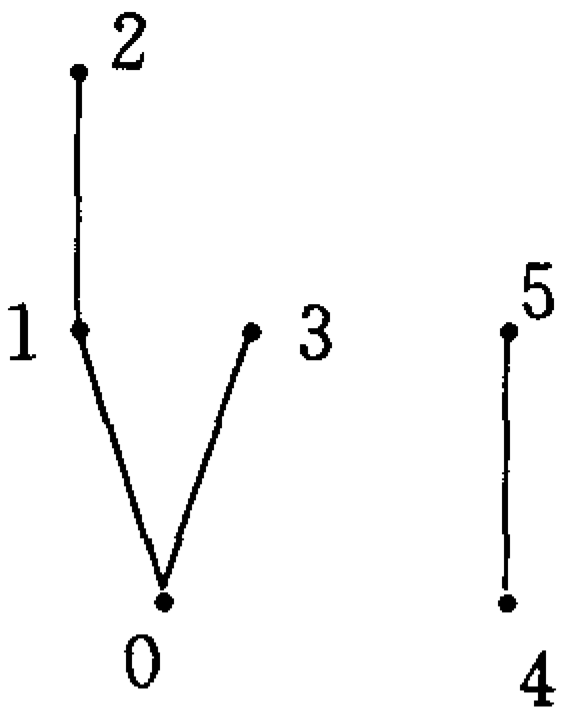
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	1	0	2	4	4
3	3	3	3	0	5	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	4	3	0



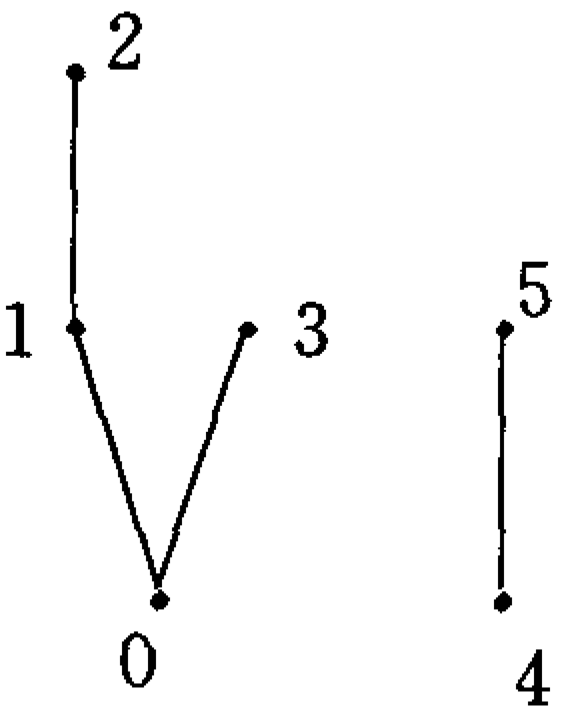
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	2	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	4	5	2	0



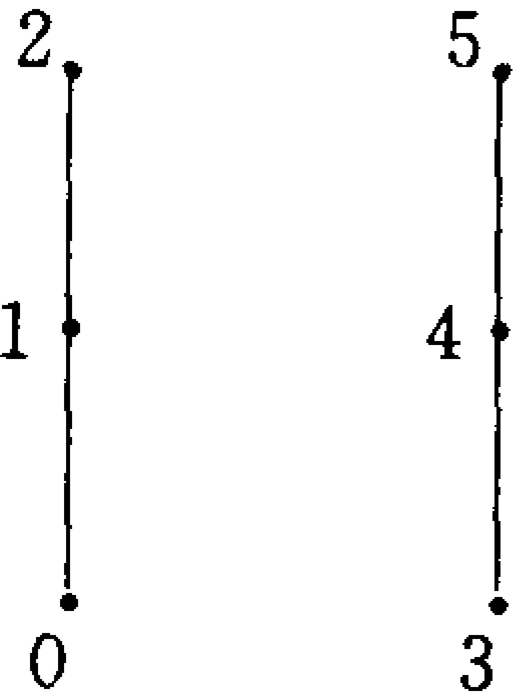
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	2	0	2	5	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	4	5	2	0



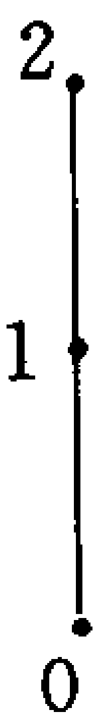
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	4	4
1	1	0	0	1	4	4
2	2	2	0	2	4	4
3	3	3	3	0	4	4
4	4	4	4	4	0	0
5	5	4	4	5	1	0

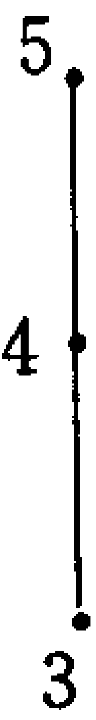


*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	3	3	1	1	0

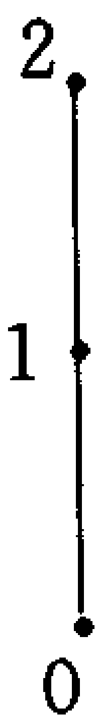


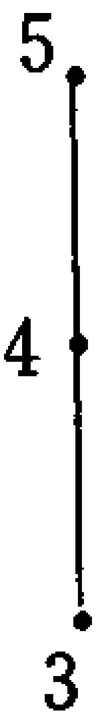
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	3	3	1	1	0



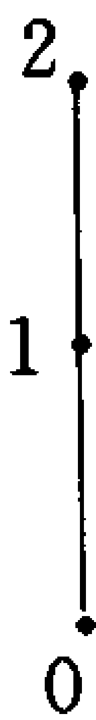


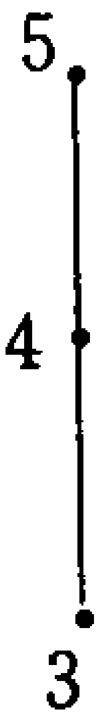
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	5	4	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	3	3	1	1	0



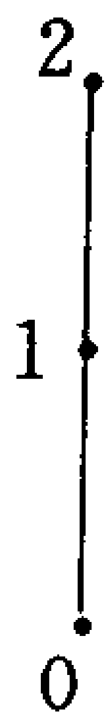


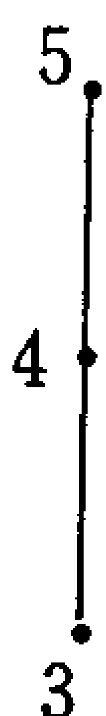
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	5	5	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	3	3	1	1	0



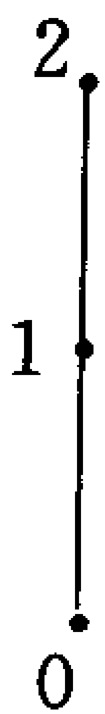


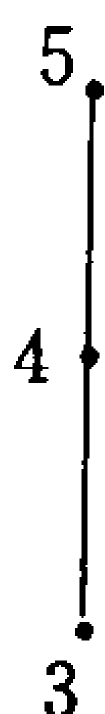
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	4	3	2	1	0



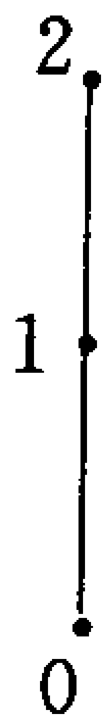


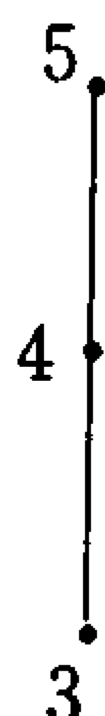
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	1	0	4	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	4	3	2	1	0



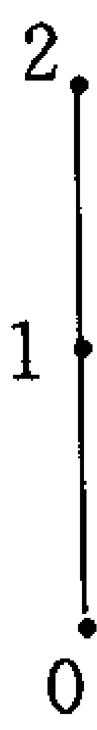


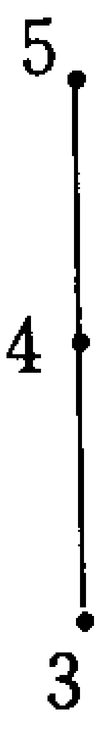
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	4	3	3
2	2	1	0	5	4	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	4	3	2	1	0



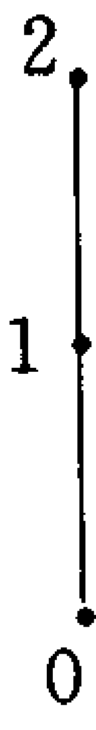


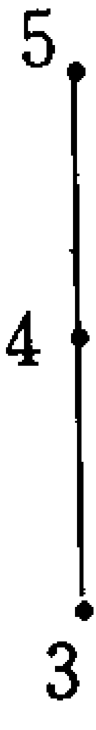
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	3	3	1	1	0



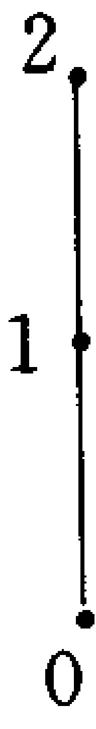


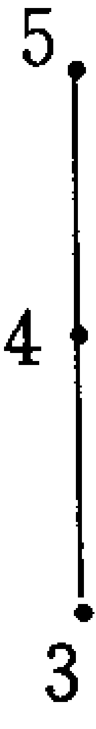
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	3	2	0	0
5	5	4	3	2	1	0



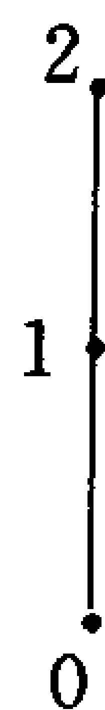


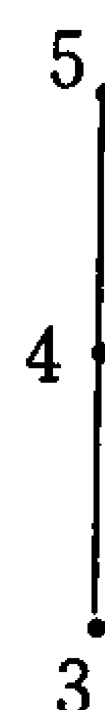
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	5	3	2	2	0



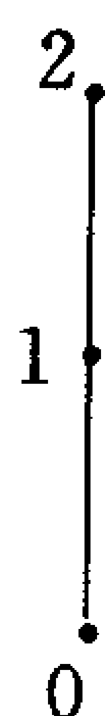


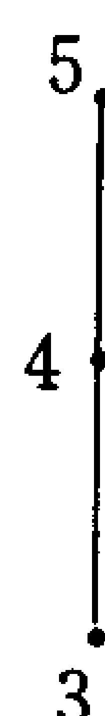
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	3	2	0	0
5	5	5	3	2	2	0



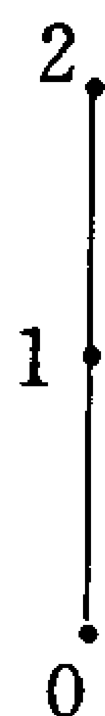


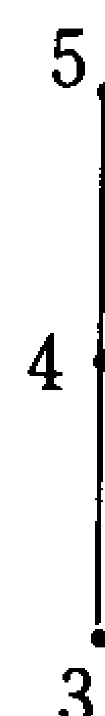
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	4	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	3	2	0	0
5	5	4	3	2	1	0



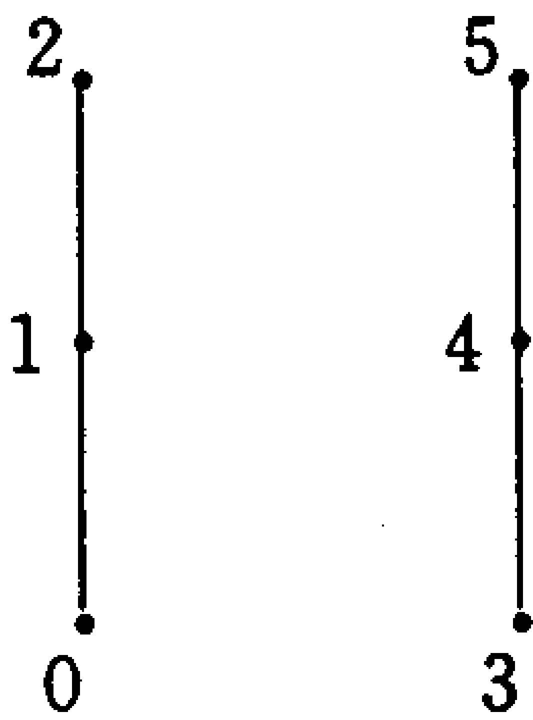


*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	3	3	3
2	2	2	0	5	5	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	5	3	2	2	0

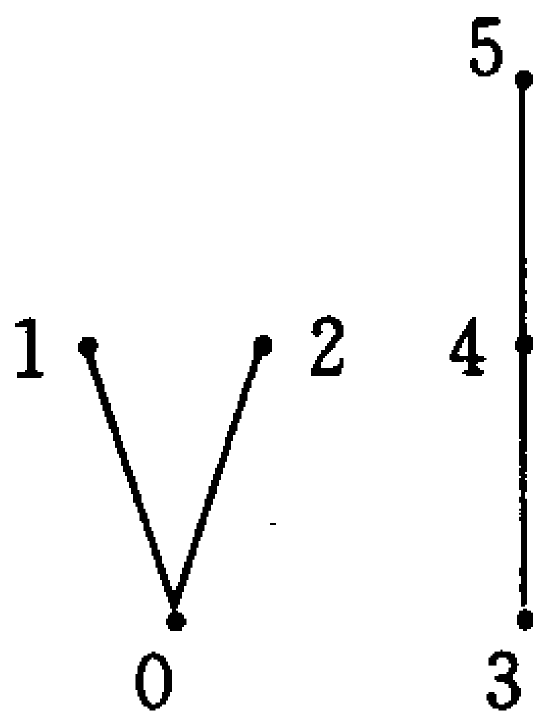




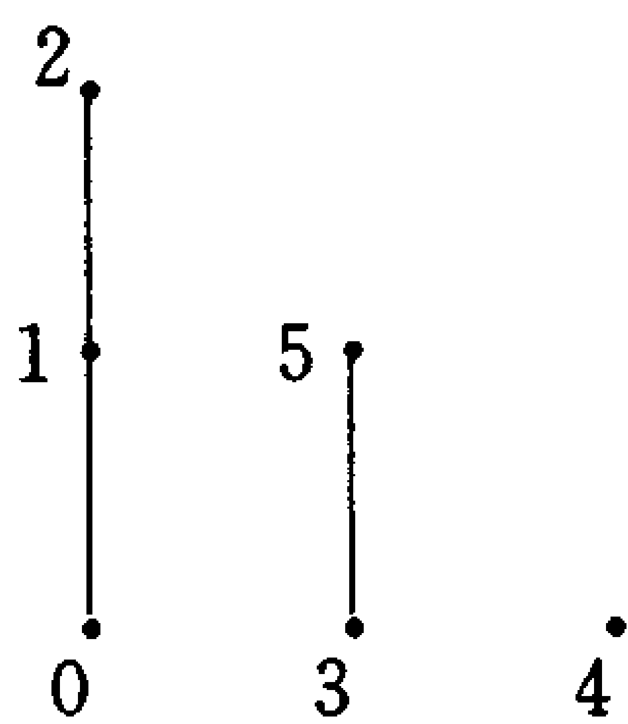
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	0	4	3	3
2	2	2	0	5	5	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	3	1	0	0
5	5	5	3	2	2	0



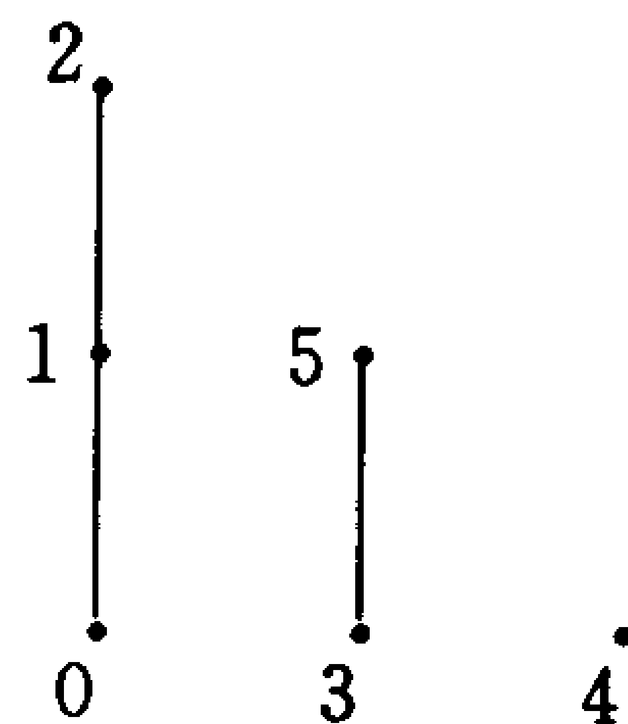
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	3
1	1	0	1	3	3	3
2	2	2	0	3	3	3
3	3	3	3	0	0	0
4	4	3	4	1	0	0
5	5	3	5	1	1	0



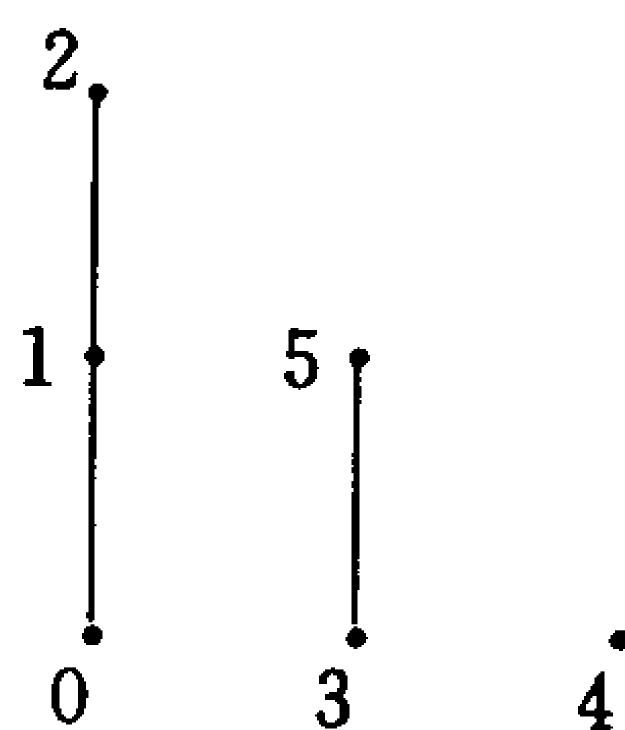
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	4	3	4
1	1	0	0	4	3	4
2	2	1	0	4	3	4
3	3	3	3	0	4	0
4	4	4	4	3	0	3
5	5	3	3	1	4	0



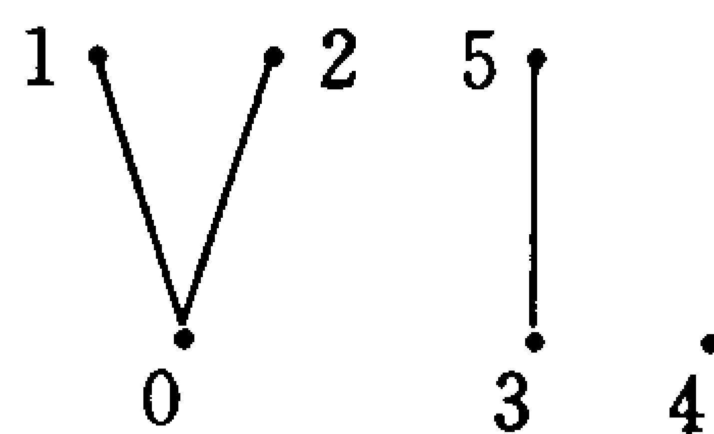
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	4	3	4
1	1	0	0	4	3	4
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	3	0	4	0
4	4	4	4	3	0	3
5	5	3	3	1	4	0



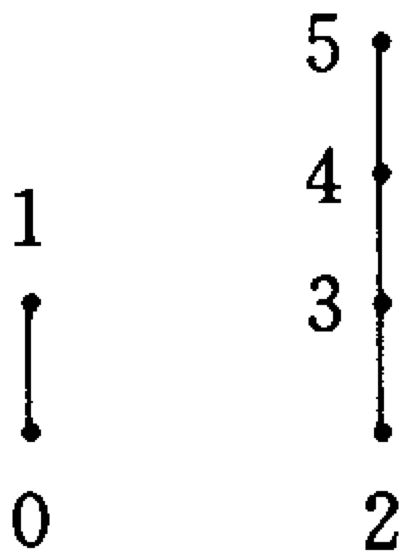
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	4	3	4
1	1	0	0	4	3	4
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	3	0	4	0
4	4	4	4	3	0	3
5	5	5	3	2	4	0



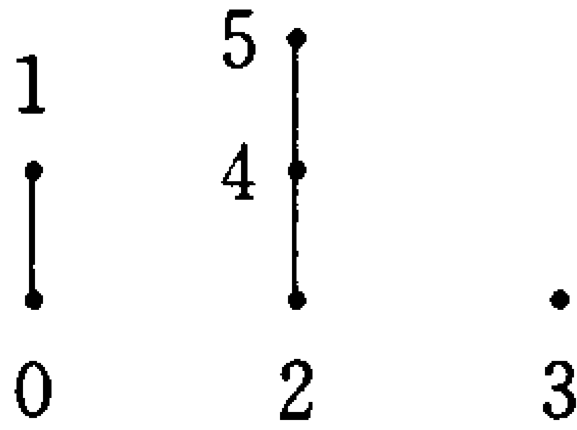
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	4	3	4
1	1	0	1	4	3	4
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	3	0	4	0
4	4	4	4	3	0	3
5	5	3	5	1	4	0



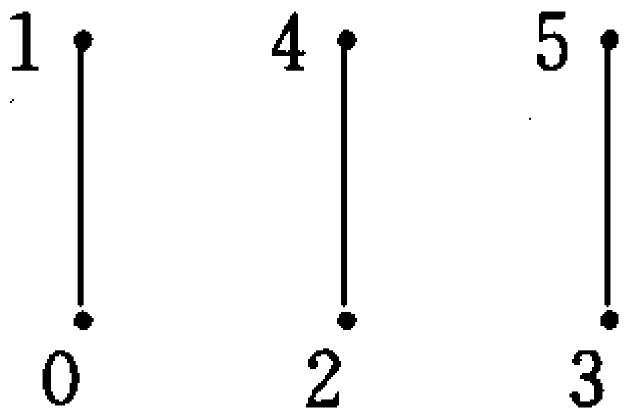
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	2	2	2
1	1	0	2	2	2	2
2	2	2	0	0	0	0
3	3	2	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	1
5	5	2	1	1	1	0



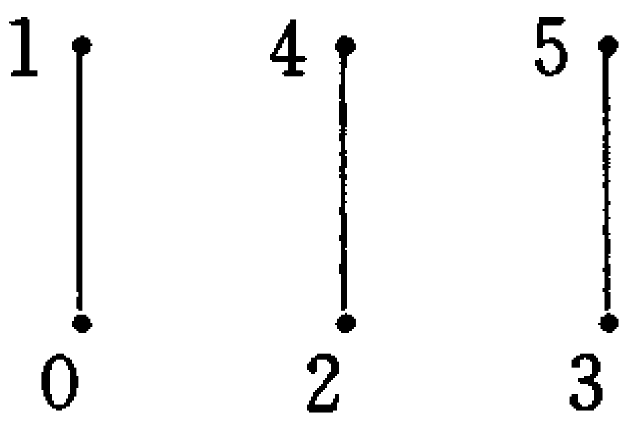
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	3
1	1	0	3	2	3	3
2	2	2	0	3	0	0
3	3	3	2	0	2	2
4	4	2	1	3	0	0
5	5	2	1	3	1	0



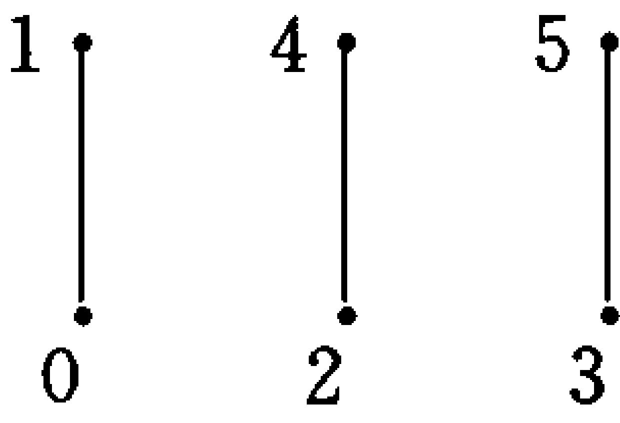
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	2
1	1	0	3	2	3	2
2	2	2	0	3	0	3
3	3	3	2	0	2	0
4	4	2	1	3	0	3
5	5	3	2	1	2	0



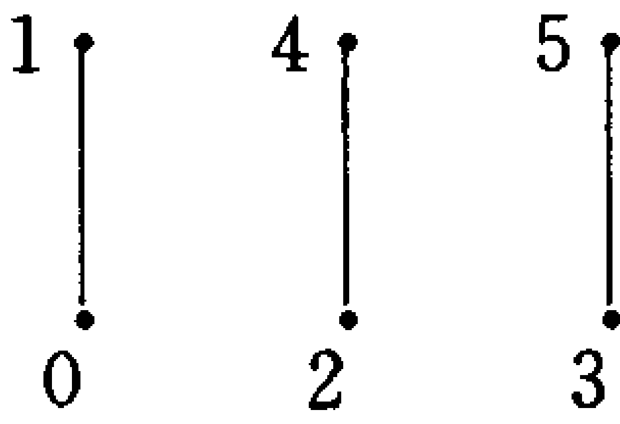
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	2
1	1	0	3	2	3	2
2	2	2	0	3	0	3
3	3	3	2	0	2	0
4	4	2	1	3	0	3
5	5	3	4	1	2	0



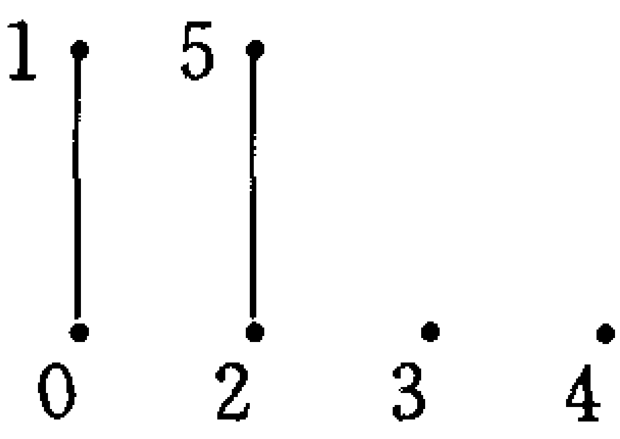
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	2
1	1	0	3	2	3	2
2	2	2	0	3	0	3
3	3	3	2	0	2	0
4	4	2	1	5	0	3
5	5	3	2	1	2	0



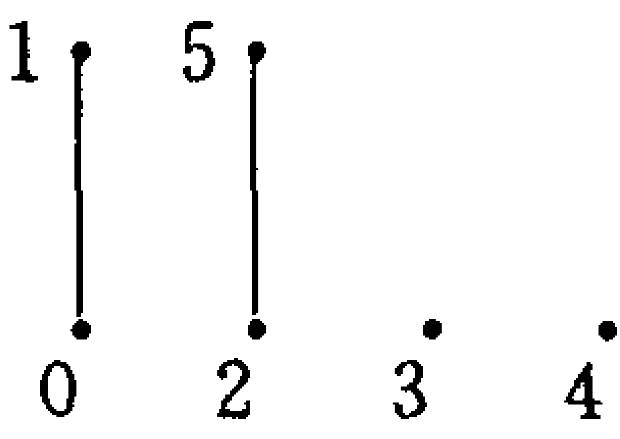
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	2
1	1	0	5	4	3	2
2	2	2	0	3	0	3
3	3	3	2	0	2	0
4	4	2	1	5	0	3
5	5	3	4	1	2	0



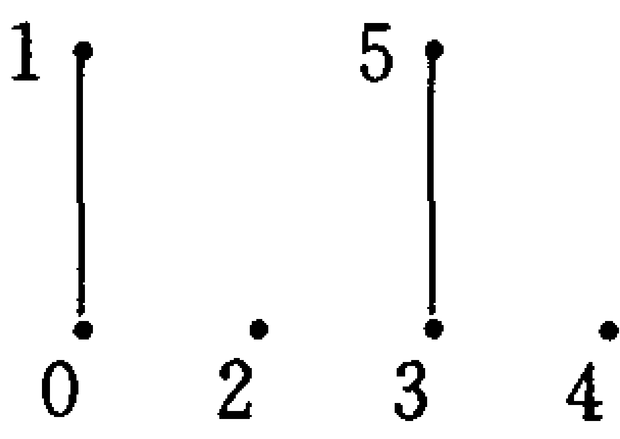
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	3	4	2
1	1	0	5	3	4	2
2	2	2	0	4	3	0
3	3	3	4	0	2	4
4	4	4	3	2	0	3
5	5	2	1	4	3	0



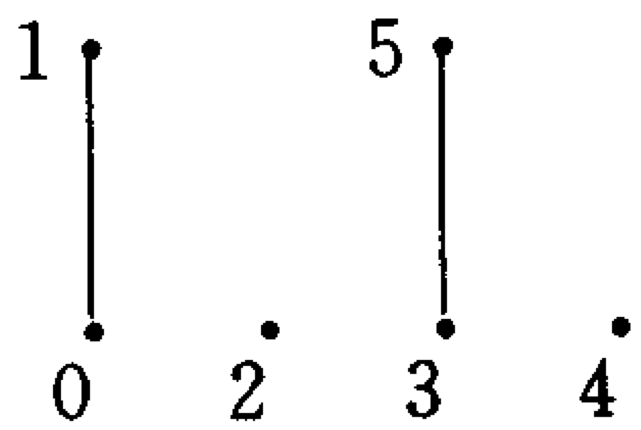
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	3	4	2
1	1	0	5	3	4	2
2	2	2	0	4	3	0
3	3	3	4	0	2	4
4	4	4	3	2	0	3
5	5	2	1	4	3	0



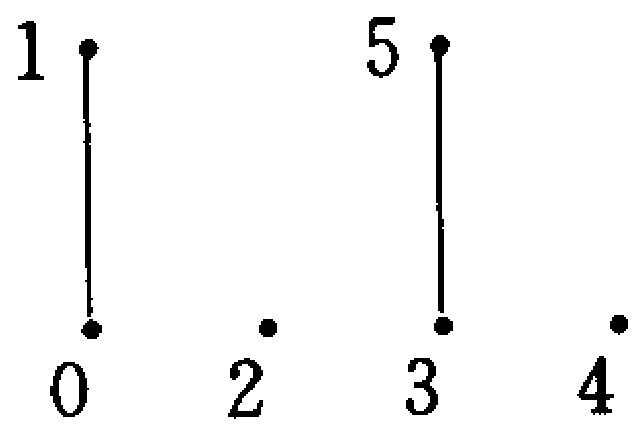
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	3	4	3
1	1	0	2	3	4	3
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	4	0	2	0
4	4	4	3	2	0	2
5	5	3	4	1	2	0



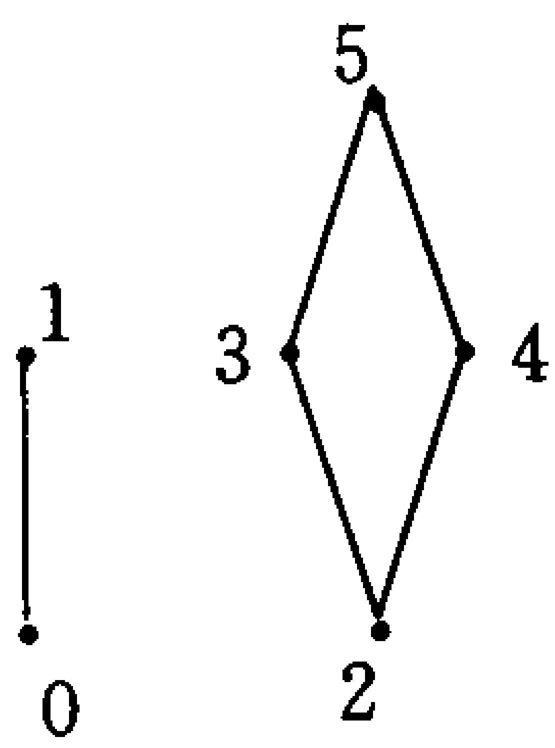
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	4	3	2	3
1	1	0	4	5	2	3
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	2	0	4	0
4	4	4	3	2	0	2
5	5	3	2	1	4	0



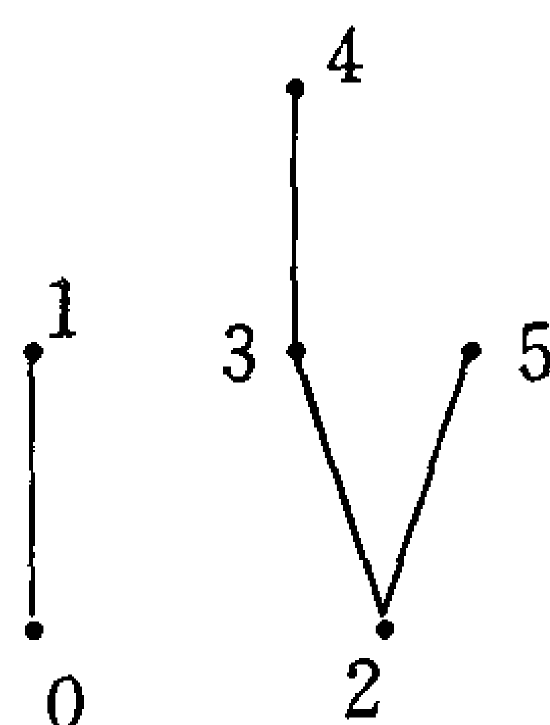
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	4	3	2	3
1	1	0	4	3	2	3
2	2	2	0	4	3	4
3	3	3	2	0	4	0
4	4	4	3	2	0	2
5	5	3	2	1	4	0



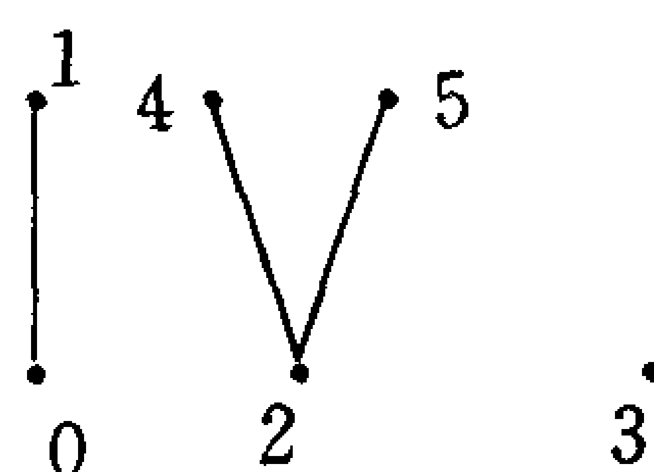
*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	2	2	2
1	1	0	2	2	2	2
2	2	2	0	0	0	0
3	3	2	1	0	1	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	2	1	1	1	0



*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	2	2	2
1	1	0	2	2	2	2
2	2	2	0	0	0	0
3	3	2	1	0	0	1
4	4	2	1	1	0	1
5	5	2	1	1	1	0



*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	3	2	3	3
1	1	0	3	2	3	3
2	2	2	0	3	0	0
3	3	3	2	0	2	2
4	4	2	1	3	0	1
5	5	2	1	3	1	0



注 以上四阶 BCI-代数引自 S. K. Goel[1]和 H. Jiang[4];五阶 BCI-代数引自 H. Jiang[3];六阶 BCI-代数引自 J. Meng,Y. B. Jun and E. H. Roh[3].

第 6 章　逻辑代数综述

用代数方法研究逻辑问题，便产生了各种代数系统. 早在 1847 年，英国数学家 George Boole (G. Boole[1]和[2]) 为了研究思维规律提出了一种代数系统. 由于它的重要性，后来的研究者称它为 Boole 代数，以纪念这位伟大的数学家. 自那时以后，出现了各种与命题演算有关的代数系统，如蕴涵半格，蕴涵代数，MV-代数，Semi-Brouwer 代数，Hilbert 代数，BCK-代数，BCI-代数，等等. 这些代数各自被独立地研究，得到了许多深刻的结果. 自然地出现一个问题：这些代数之间有何关系呢？这个问题部分地被解决，其结果分散在各个文献中，至今没有系统的论述. 我们在多年研究逻辑代数的过程中，发现 BCK-代数和 BCI-代数是各种逻辑代数的一个统一处理框架. 本章将以 BCK-代数和 BCI-代数为主线详细阐述各种逻辑代数之间的关系.

6.1　有界 BCK-代数和 Fuzzy 蕴涵代数

1966 年，K. Iséki 引入了 BCK-代数的概念 (见 K. Iséki[1]和[2]，Y. Imai and K. Iséki[1]). 在命题逻辑中，蕴涵公理为：

(I_1)　$\varphi \to \varphi$

(I_2)　$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(I_3)　$(\varphi_1 \to \varphi_2) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2))$

(I_4)　$(\varphi \to (\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\varphi \to \psi_1) \to (\varphi \to \psi_2))$

(I$_5$) $(\varphi_0 \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\varphi_1 \to (\varphi_0 \to \varphi_2))$.

古典逻辑有各种不同的公理系统. Hilbert-Bernays 公理系统中，蕴涵公理为：

(H$_1$) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(H$_2$) $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$

(H$_3$) $(\varphi_1 \to \varphi_2) \to ((\varphi_2 \to \psi) \to (\varphi_1 \to \psi))$.

C. A. Meredith 在他的逻辑系统中，强调了下述公理的重要性：

(M) $\psi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$.

值得注意的是(H$_3$) 和(M) 分别对应于集合论中的下列性质：

$(A - B) - (A - C) \subseteq C - B$

$A - (A - B) \subseteq B$

以(I$_1$)，(I$_2$)，(H$_3$) 为基础，K. Iséki 引入了 BCK- 代数的概念. 有关这些代数的详细情况，请参看文献 K. Iséki and S. Tanaka[1] 和[2]，J. Meng and Y. B. Jun[3].

定义 6.1.1(K. Iséki) 一个系统$\langle X; *, 0\rangle$ 叫做 BCK- 代数，如果它满足：

BCK-1 $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

BCK-2 $(x * (x * y)) * y = 0$

BCK-3 $x * x = 0$

BCK-4 $0 * x = 0$

BCK-5 $x * y = y * x = 0$ 蕴涵 $x = y$.

在 BCK- 代数中，可以定义序关系 $\leqslant$ 为：$\forall\, x, y \in X$，$x \leqslant y$ 当且仅当 $x * y = 0$.

BCK- 代数有下列性质：(关于 BCK- 代数的定义和性质均见 K. Iséki[1]，以后不再一一指明)

$x * y \leqslant x$

$(x * y) * z = (x * z) * y$

$(x*z)*(y*z)\leqslant x*y$

$x\leqslant y\Rightarrow x*z\leqslant y*z,\ z*y\leqslant z*x.$

这类代数叫做 BCK- 代数的原因是：它与组合逻辑中的组合子 **K**,**B**,**C** 密切相关，C. A. Meredith 称这个系统为 BCK- *系统*（见 A. N. Prior[1]P. 316）. M. W. Bunder[1] 的下述结果清楚地揭示了这种关系.

定理 6.1.1(M. W. Bounder[1])　一个(2,0) 型代数 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个 BCK- 代数当且仅当它满足：

K　$(x*y)*x=0$

B　$((y*z)*(x*z))*(y*x)=0$

C　$((z*x)*y)*((z*y)*x)=0$

BCK-5　$x*y=y*x=0$ 蕴涵 $x=y$.　□

上述 **K**,**B**,**C** 是组合子 **K**,**B**,**C** 的代数表述，它们的函数性为：

K　$FxFyx$

B　$FFxyFFzxFzy$

C　$FFxFyzFyFxz$

I. Fleischer[1] 讨论了 BCK- 代数同整偏序幺半群之间的关系.

定义 6.1.2　假设 X 是一个非空集，$\leqslant$ 是 X 上的一个二元关系，$\cdot$ 是一个二元运算，1 是一个常元. 则 $\langle X;\leqslant,\cdot,1\rangle$ 叫做一个*整偏序可换幺半群*，如果它满足：

(M_1)　$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

(M_2)　$x\cdot 1=x$

(O_1)　$\langle X;\leqslant\rangle$ 是一个偏序集

(O_2)　$x\leqslant y$ 蕴涵 $x\cdot z\leqslant y\cdot z$

(O_3) 1 是$\langle X;\leqslant\rangle$的最大元

(C) $x\cdot y=y\cdot z$.

定义 6.1.3 设$\langle X;\cdot,\leqslant,1\rangle$是一个整偏序可换幺半群. 对任意$a,b\in X$,如果集合$\{x\in X: b\cdot x\leqslant a\}$有最大元,记为$a:b$,则称$X$是可剩余的;$a:b$称为$a$关于$b$的剩余.(运算 : 称为蕴涵或剩余,见 G. Birkhoff[1]).

定理 6.1.2(I. Fleischer[1]) 假设$\langle X;\cdot,\leqslant,1\rangle$是一个剩余整偏序可换幺半群,则$\langle X;:,1\rangle$是一个 BCK-代数. □

对于 BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$中任一元素a,用a^{-1}记$X\to X$的一个自映射,使得:对任意$x\in X$,$xa^{-1}=x*a$. 而a^{-1}和b^{-1}的复合记为$a^{-1}\circ b^{-1}$. 记

$M(X)=\{a^{-1}\circ\cdots\circ b^{-1}\mid\{a,\cdots,b\}$是$X$的任意非空有限集$\}$.

定理 6.1.3(I. Fleischer[1]) 若$\langle X;*,0\rangle$是 BCK-代数,则$\langle M(X);\circ,\prec,0^{-1}\rangle$是整剩余偏序可换幺半群,其中$a^{-1}\prec b^{-1}$当且仅当$\forall x\in X$,$xa^{-1}\leqslant xb^{-1}$. □

有关这方面的进一步结果将在后面叙述.

1990 年,吴望名[1]提出了 Fuzzy 蕴涵代数的概念,并研究了它的性质.

定义 6.1.4(吴望名[1]) (2,0)型代数$\langle X;\to,0\rangle$称为 *Fuzzy* 蕴涵代数,如果它满足:

(i) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$

(ii) $(x\to y)\to[(y\to z)\to(x\to z)]=0$

(iii)　$x \to x = 1$

(iv)　若 $x \to y = y \to x = 1$，则 $x = y$

(v)　$0 \to x = 1$

其中 $1 = 0 \to 0$.

姜豪，邓方安[1] 指出 Fuzzy 蕴涵代数等价于有界 BCK- 代数.

定义 6.1.5　BCK- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做有界的，如果存在 $1 \in X$ 使得：$\forall x \in X, x \leqslant 1$.

定理 6.1.4(姜豪，邓方安[1])　若 $\langle X; \to, 0\rangle$ 是 Fuzzy 蕴涵代数，令

$$e = 0,\ \theta = 1,\ x * y = y \to z,$$

则 $\langle X; *, \theta\rangle$ 是有界 BCK- 代数. 反之，若 $\langle X; *, \theta\rangle$ 是有界 BCK- 代数，令

$$1 = \theta,\ 0 = e,\ x \to y = y * x,$$

则 $\langle X; \to, 0\rangle$ 是 Fuzzy 蕴涵代数. □

6.2　正定关联 BCK- 代数和 Boole 代数

正定关联 BCK- 代数是 BCK- 代数的一个重要的子类.

定义 6.2.1　BCK- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做正定关联的，如果它满足下列两个等价条件之一：

(P_1)　$(x * y) * z = (x * z) * (x * z)$

(P_2)　$(x * y) * y = x * y$.

值得注意,(P_1) 是蕴涵公理(A_4) 的代数表述,(P_2) 是(H_2) 的代数表述.

C. Barbacioru[1] 证明了:正定关联 BCK- 代数是范畴等价于 Hilbert 代数.

定义 6.2.2 (2,0) 型代数 $\langle X; \rightarrow, 1\rangle$ 叫做 *Hilbert 代数*,如果它满足:

(i) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$

(ii) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$

(iii) 如果 $x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1$,则 $x = y$.

定理 6.2.1(C. Barbacioru[1]) 设 $\langle X; *, 0\rangle$ 是正定关联 BCK- 代数,令 $\overline{X} = X$, $x \rightarrow y = y * x$, $1_{\overline{X}} = 0$,则 $\langle \overline{X}; \rightarrow, 1_{\overline{X}}\rangle$ 是 Hilbert 代数. 相反地,设 $\langle X; \rightarrow, 1\rangle$ 是 Hilbert 代数,令

$$\overline{X} = X,\ x * y = y \rightarrow x,\ 0_{\overline{X}} = 1,$$

则 $\langle \overline{X}; *, 0_{\overline{X}}\rangle$ 是正定关联 BCK- 代数. 所以正定关联 BCK- 代数等价于 Hilbert 代数. □

J. C. Abbott[1] ~ [3] 详细研究了蕴涵代数,J. Meng[10] 证明了蕴涵代数等价于关联 BCK- 代数.

定义 6.2.3(J. C. Abbott[1]) (2,0) 型代数 $\langle X; \rightarrow, 1\rangle$ 是蕴涵代数(Implication algebra),如果它满足:

(i) $x = (x \rightarrow y) \rightarrow x$

(ii) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = y \rightarrow (y \rightarrow x)$

(iii) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$.

定义 6.2.4 BCK- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做是关联的

(Implicative),如果它满足：$x = x * (y * x)$.

定理 6.2.2(J. Meng[10])　(2,0) 型代数 $\langle X; \rightarrow, 1\rangle$ 是蕴涵代数当且仅当 $\langle X; *, 1\rangle$ 是关联 BCK- 代数,这儿 $x * y = y \rightarrow x$.

设 $\langle X; *, 0, 1\rangle$ 是有界关联 BCK- 代数，令 $x \wedge y = y * (y * x)$. K. Iséki and S. Tanaka[2] 证明了 $x \wedge y = y \wedge x$,且 $x \wedge y = \inf\{x, y\}$,$x \vee y = N(Nx \wedge Ny) = \sup\{x, y\}$,这儿 $Nx = 1 * x$.

定理 6.2.3(K. Iséki and S. Tanaka[2])　如果 $\langle X; *, 0, 1\rangle$ 是有界关联 BCK- 代数,则 $\langle X; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ 是有补的有界分配格,即 Boole 代数,其补运算为 $x' = Nx$. □

实际上,这个定理的逆也成立.

定理 6.2.4　如果 $\langle X; \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ 是 Boole 代数,令 $x * y = x \wedge Ny$,则 $\langle X; *, 0, 1\rangle$ 是有界关联 BCK- 代数. □

上述两个定理表明,Boole 代数和有界关联 BCK- 代数是等价的.

6.3　具有条件(S) 的 BCK- 代数和蕴涵半格

蕴涵半格由 H. B. Curry[1] 提出,是与命题演算密切相关的最纯粹,最重要的一类代数. 在 W. C. Nemits[1],W. C. Nemits and T. Whaley[1] 中被进一步研究. M. W. Chan and K. P.

Shum[1] 推广这类代数为负的蕴涵偏序半群. J. Meng[9] 和 J. Meng, S. M. Hong and Y. B. Jun[1] 等讨论了上述两类代数与 BCK- 代数的关系.

定义 6.3.1(M. W. Chan and K. P. Shum[1]) 设 X 是非空集, $\leqslant$ 是 X 上的二元关系, $\cdot$ 和 $*$ 是 X 上的二元运算, 1 是 X 的一个常元. $\langle X; \leqslant, \cdot, *, 1\rangle$ 叫做负的蕴涵偏序半群, 如果它满足:

(i) $\langle X; \leqslant\rangle$ 是偏序集

(ii) $\langle X; \cdot, 1\rangle$ 是幺半群

(iii) $x \leqslant y$ 蕴涵 $x \cdot z \leqslant y \cdot z$ 和 $z \cdot x \leqslant z \cdot y$

(iv) $x \cdot y \leqslant x$ 和 $x \cdot y \leqslant y$

(v) $z \leqslant x * y$ 当且仅当 $z \cdot x \leqslant y$.

如果$(X; \cdot)$ 是可换半群, 则$\langle X; \leqslant, \cdot, *, 1\rangle$ 叫做可换的.

应当注意, 1 是$\langle X; \leqslant\rangle$ 的最大元.

J. Meng[9] 证明了, 负的蕴涵偏序可换半群范畴等价于具有条件(S) 的 BCK- 代数.

引理 6.3.1(J. Meng[9]) 设 X 是非空集, $\leqslant$ 是 X 上的二元关系, $\cdot$ 和 $*$ 是 X 上的二元运算, 1 是 X 的一个常元, 则$\langle X; \leqslant, \cdot, *, 1\rangle$ 是负的蕴涵偏序可换半群当且仅当它满足:

(i) $x \leqslant x$

(ii) $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant z$ 蕴涵 $x \leqslant z$

(iii) $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 蕴涵 $x = y$

(iv) $x \leqslant y$ 蕴涵 $z * x \leqslant z * y$

(v) $x * (y * z) = y * (x * y)$

(vi) $x \leqslant 1$

(vii) $x \leqslant y$ 当且仅当 $x * y = 0$

(viii)　$x * (y * z) = (x \cdot y) * z$.　□

定义 6.3.2　BCK-代数$\langle X; *, 0\rangle$叫做具有条件(S)的,如果

$$\forall\, x,y \in X,\ A(x,y) = \{z \in X : z * x \leqslant y\}$$

有最大元,记为$x \circ y$,而$\circ$称为S-运算.

定理 6.3.2(J. Meng[9])　设$\langle X; \leqslant, \cdot, *, 1\rangle$是一个代数系统,$\leqslant$是$X$上的二元关系,$\cdot$和$*$是$X$上的二元运算,1是$X$的常元,在$X$上定义$\prec$和$\otimes$为

$$x \prec y \text{ 当且仅当 } y \leqslant x,\ x \otimes y = y * x,$$

则$\langle X; \leqslant, \cdot, *, 1\rangle$是负的蕴涵偏序可换半群当且仅当$\langle X; \prec, \cdot, \otimes, 1\rangle$是具有条件(S)的BCK-代数,其中$\cdot$是S-运算.　□

定义 6.3.3(H. B. Curry[1])　设X是非空集,$\leqslant$是X上二元关系,$\wedge$和$*$是X上的二元运算,$\langle X; \leqslant, \wedge, *\rangle$称为蕴涵半格,如果它满足:

(i)　$\langle X; \leqslant\rangle$是偏序集

(ii)　$\langle X; \wedge\rangle$关于$\leqslant$是一个下半格

(iii)　$z \leqslant x * y$当且仅当$z \wedge x \leqslant y$.

运算$*$叫做蕴涵(亦称为剩余,见G. Birkhoff[1]).

蕴涵半格必有最大元,记为1.

J. Meng, Y. B. Jun and S. M. Hong[1]证明了:蕴涵半格等价于具有条件(S)的正定关联BCK-代数.

定理 6.3.3(J. Meng, Y. B. Jun and S. M. Hong[1])　假设$\langle X; \wedge, *, 1\rangle$是蕴涵半格,在$X$上定义$\otimes$为$x \otimes y = y * x$,则$\langle X; \wedge, \otimes, 1\rangle$是具有条件(S)的正定关联BCK-代数.相反地,设

$\langle X;\circ,*,1\rangle$ 是具有条件(S) 的正定关联 BCK- 代数,在 X 上定义 $\otimes$ 为 $x\otimes y=y*x$,则 $\langle X;\circ,\otimes,1\rangle$ 是蕴涵半格,其中 $\circ$ 是半格运算. □

K. Iséki[4] 证明了,具有条件(S) 的 BCK- 代数是正定关联的当且仅当 $\forall x\in X, x\circ x=x$. 由此我们得到

推论 6.3.4 负的蕴涵偏序可换半群 $\langle X;\leqslant,\cdot,*,1\rangle$ 是蕴涵半格当且仅当 $\forall x\in X, x\cdot x=x$. □

Griss 代数和 Semi-Brouwer 代数也是两类重要的逻辑代数,前者是 G. F. C. Griss[1] 研究的 negationless 逻辑的代数表述,由 Y. Imai 和 K. Iséki 提出,后者由 P. V. R. Murty[1] 提出. Y. H. Lin[1] 讨论了它们同具有条件(S) 的正定关联 BCK- 代数的关系.

定义 6.3.4(G. F. C. Griss[1]) 设 X 是非空集,$\leqslant$ 是 X 上的二元关系,$\vee$ 和 $*$ 是 X 上的二元运算,0 是 X 的常元,则 $\langle X;\leqslant,\vee,*,0\rangle$ 叫做 *Griss* 代数,如果它满足:

(i) $\langle X;\vee\rangle$ 是上半格,0 是最小元

(ii) $(x\vee y)*(y\vee z)\leqslant x\vee z$

(iii) $x*y\leqslant(x*z)\vee(z*y)$

(iv) $x*y=0$ 当且仅当 $x\leqslant y$.

一个 Griss 代数叫做正则的,如果 $x*0=x$.

定理 6.3.5(Y. H. Lin[1]) 设 X 是非空集,$\leqslant$ 是 X 上二元关系,$\circ$ 和 $*$ 是 X 上的二元运算,0 是 X 的一个常元,则 $\langle X;\leqslant,\circ,*,0\rangle$ 是 Griss 代数当且仅当它是具有条件(S) 的正定关联 BCK- 代数,其中 $\leqslant$ 是 BCK- 序,$\circ$ 是 S- 运算. □

定义 6.3.5(P.V.R.Murty[1])　(2,2,0) 型代数$\langle X; *, \circ, 0\rangle$叫做 *Semi-Brouwer* 代数，如果它满足：

(i)　$x \circ x = x$

(ii)　$x \circ y = y \circ x$

(iii)　$x * x = 0$

(iv)　$(x * y) \circ y = x \circ y$

(v)　$(x * y) * z = x * (y \circ z)$.

定理 6.3.6(Y.H.Lin[1])　(2,2,0) 型代数$\langle X; *, \circ, 0\rangle$是 Semi-Brouwer 代数当且仅当它是具有条件(S)的正定关联 BCK-代数，其中$\circ$是 S-运算. □

结合定理 6.3.3,6.3.5 和 6.3.6,我们得到

推论 6.3.7　蕴涵半格，正则 Griss 代数，Semi-Brouwer 代数，具有条件(S)的正定关联 BCK-代数是彼此等价的. □

Z.M.Chen and Y.S.Huang[1] 讨论了等幂环和具有条件(S)的正定关联 BCK-代数的关系.

定义 6.3.6　假设 X 是非空集，$\cdot$ 和 $+$ 是 X 上的二元运算，则$\langle X; +, \cdot, 0\rangle$叫做一个环，如果(以下简记 $x \cdot y$ 为 xy)

(i)　$\langle X; +\rangle$是 Abel 群，0 是加法零元

(ii)　$\langle X; \cdot\rangle$是半群

(iii)　乘法对加法的左，右分配律成立，即 $\forall\, x, y \in X$

$x(y + z) = xy + xz$　(左分配律)

$(y + z)x = yx + zx$　(右分配律)

一个环叫做等幂的，如果 $\forall x \in X, xx = x$.

定理 6.3.8(Z. M. Chen and Y. S. Huang[1]) 假设 $\langle X; \circ, *, 0\rangle$ 是具有条件(S) 的正定关联 BCK- 代数，令

$$x + y = (x * y) \circ (y * x),\ x \cdot y = x \wedge y,$$

则 $\langle X; +, \cdot, 0\rangle$ 是等幂环，其中 0 是加法 + 的零元. 相反地，若 $\langle X; +, \cdot, 0\rangle$ 是等幂环，定义

$$x * y = x + xy,\ x \circ y = x + y + xy,$$

则 $\langle X; *, \circ, 0\rangle$ 是具有条件(S) 的正定关联 BCK- 代数，其中 ∘ 是 S- 运算. □

K. Iséki 得到以下重要结果.

定理 6.3.9(K. Iséki[1]) 假设 $\langle X; *, \circ, 0\rangle$ 是一个具有条件(S) 的可换 BCK- 代数，则 $\langle X; \circ, \wedge, *, 0\rangle$ 是广义 Boole 代数，这儿 0 是最小元，也就是说，$\langle X; \circ, \wedge\rangle$ 是一个分配格，且满足下述 De Morgan 律：

$$x * (y \circ z) = (x * y) \wedge (x * z)$$
$$x * (y \wedge z) = (x * y) \circ (x * z). \qquad \square$$

关于广义 Boole 代数，有兴趣的读者可参看 Grätzer[1]Chapter Ⅱ 和 M. H. Stone[2].

6.4 可换 BCK- 代数和 MV- 代数

可换 BCK- 代数是一类重要的代数，它是 S. Tanaka[1], [2] 提出并研究的，现在已成为一个重要的研究方向.

定义 6.4.1(S. Tanaka[1])　BCK-代数$\langle X;*,0\rangle$叫做可换的,如果$\forall x,y\in X, x\wedge y=y\wedge x$,这儿

$$x\wedge y=y*(y*x).$$

定理6.4.1　如$\langle X;*,0\rangle$是可换BCK-代数,则$\langle X;\wedge\rangle$是一个下半格(也可参见 K. Iséki and S. Tanaka[2]).

遵照 Y. Komori 的说法,Lukasiewicz 代数可以定义为

定义 6.4.2(Y. Komori[1])　(2,0) 型代数$\langle X;*,0\rangle$叫做 Lukasiewicz 代数,如果它满足:

(i)　$x=x*0$

(ii)　$x*y\leqslant x$

(iii)　$(x*y)*(x*z)\leqslant z*y$

(iv)　$x*(x*y)=y*(y*x)$

(v)　$x*y=(x*y)*(y*x)$

(vi)　$x\leqslant y$ 当且仅当 $x*y=0$

条件(5) 亦可写为

(v′)　$(x*y)\wedge(y*x)=0.$

定理 6.4.2　Lukasiewicz 代数等价于满足条件(5) 的可换 BCK-代数.　□

K. Iséki 和 S. Tanaka[2] 证明了一个重要结果:一个 BCK-代数是关联的当且仅当它既是正定关联的又是可换的. 结合定理 6.3.3,定理 6.3.8 和定理 6.4.2,我们有

定理 6.4.3 代数 X 是一个等幂环当且仅当它既是蕴涵半格又是 Lukasiewicz 代数. □

这里我们简单回顾一个 Lukasiewicz 逻辑知识. 它包含可数多个命题变量和两个命题运算 C 和 N,满足:

(i) 每个命题变量是一个公式

(ii) 如果 P 是一个公式,则 NP 也是一个公式

(iii) 如果 P 和 Q 是公式,则 CPQ 是一个公式.

公理模式如下:

A.1 $CPCQP$

A.2 $CCPQCCQRCPR$

A.3 $CCCPQQCCQPP$

A.4 $CCNPNQCQP$.

无穷值 Lukasiewicz 逻辑的代数描述,已经由研究者们在不同的名称下,甚至使用不同的基本运算,进行了考察. 为了用代数方法证明 Luksiewicz 无穷值逻辑的完全性定理,C. C. Chang[1] 和 [2] 引入并研究了多值逻辑代数,简称为 MV-代数.

定义 6.4.3(C. C. Chang[1]) 假设 X 是非空集,0 和 1 是 X 的不同元素, $+$ 和 $\cdot$ 是 X 上的二元运算, $^{-}$ 是 X 上的一元运算. $\langle X; +, -, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ 叫做 MV-代数,如果它满足:

Ax.1 $x + y = y + x$

Ax.1′ $x \cdot y = y \cdot x$

Ax.2 $x + (y + z) = (x + y) + z$

Ax.2′ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Ax.3 $x + \overline{x} = 1$

Ax.3′ $x \cdot \overline{x} = 0$

Ax.4 $x + 1 = 1$

Ax. 4′ $x \cdot 0 = 0$

Ax. 5 $x + 0 = x$

Ax. 5′ $x \cdot 1 = x$

Ax. 6 $(x + y)^{-} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Ax. 6′ $(x \cdot y)^{-} = \bar{x} + \bar{y}$

Ax. 7 $x = (\bar{x})^{-}$

Ax. 8 $\bar{0} = 1$

记 $x \vee y = (x \cdot \bar{y}) + y, x \wedge y = (x + \bar{y}) \cdot y$，还有下述 6 条公理：

Ax. 9 $x \vee y = y \vee x$

Ax. 9′ $x \wedge y = y \wedge x$

Ax. 10 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

Ax. 10′ $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

Ax. 11 $x + (y \vee z) = (x + y) \wedge (x + z)$

Ax. 11′ $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

在这个定义中，运算 + 和 · 具有加法和乘法的类似性质，运算 ⁻ 对应于否定. 虽然这些运算有某些优美的性质，但是从逻辑的观点看，它们不如蕴涵词和否定词那么自然. 因此 P. Magani[1] 使用否定词¬ 给出了 MV- 代数的另一组公理系统.

定理 6.4.4(P. Magani[1]) 代数 $\langle X; +, \cdot, \neg, 0, 1\rangle$ 是 MV- 代数当且仅当它满足：

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(ii) $x + y = y + x$

(iii) $x + 0 = x$

(iv) $\neg\neg x = x$

(v) $x + \neg (= \neg 0$

(vi) $\neg(\neg x + y)y = \neg(\neg y + x) + x$. □

D. Mundici[1] 证明了 MV- 代数和有界可换 BCK- 代数是范畴等价的.

定理 6.4.5(D. Mundici[1]) 假设$\langle X; +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$是 MV- 代数,令$x * y = x \cdot \bar{y}$,则$\langle X; *, 0, 1\rangle$是有界可换 BCK- 代数. 相反地,如果$\langle X; *, 0, 1\rangle$是有界可换 BCK- 代数,令

$$\bar{x} = 1 * x, x \cdot y = x * \bar{y}, x + y = (\bar{x} * y)^{-},$$

则$\langle X; +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$是 MV- 代数. 因此 MV- 代数范畴等价于有界可换 BCK- 代数. □

由这个定理得到一个有用结果.

定理 6.4.6(C. S. Hoo[5]) 有界可换 BCK- 代数$\langle X; *, 0, 1\rangle$是具有条件(S)的,对任意$x, y \in X$,S- 运算$\circ$即为$+$,$x \circ y = x + y$. □

M. Wajsberg 第一个用代数方法研究 Lukasiewicz 逻辑,他所提出的代数系统被 A. J. Rodrigues 称为 Wajsberg 代数.

定义 6.4.4(A. J. Rodriguez[1]) Wajsberg 代数是一个(2, 1,0) 型代数$\langle X; \to, \neg, u\rangle$,它满足:

W1 $u \to x = x$

W2 $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = u$

W3 $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$

W4 $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x) = u.$ □

定理 6.4.7 设X是非空集,$\to$是X上的二元运算,$\neg$是X上的一元运算,u是X的一个常元,我们定义

$$x * y = y \to x,\ 1 = \neg u,\ 1 * x = \neg x,\ 0 = u,$$

则 $\langle X;\to,\neg,u\rangle$ 是 Wajsberg 代数当且仅当 $\langle X;*,0,1\rangle$ 是有界可换 BCK- 代数,其中 0 是最小元,1 是最大元. □

徐扬从格出发提出了格蕴涵代数.

定义 6.4.5(徐扬[1])　假设 X 是非空集,$\vee$,$\wedge$ 是 X 上的二元运算,$^-$ 是一元运算,0 和 1 是 X 的常元. $\langle X;\vee,\wedge,\to,^-,0,1\rangle$ 叫做**格蕴涵代数**,如果它满足:

(i)　$\langle X;\vee,\wedge\rangle$ 是一个格,0 和 1 分别是最小元和最大元

(ii)　$a \wedge b = a$ 蕴涵 $a^- \wedge b^- = b^-$

(iii)　$(a^-)^- = a$

(iv)　$x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$

(v)　$x \to x = 1$

(vi)　$x \to y = y^- \to x^-$

(vii)　$x \to y = y \to x = 1$,则 $x = y$

(viii)　$(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$

(ix)　$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$

(x)　$(x \wedge y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$.

朱怡权[3] 证明了,格蕴涵代数等价于有界可换 BCK- 代数.

定理 6.4.8(朱怡权[3])　假设 $\langle X;\vee,\wedge,\to,^-,0,1\rangle$ 是格蕴涵代数,令

$$x * y = y \to x,\ I = 0,\ \theta = 1,$$

则 $\langle X;*,\theta,I\rangle$ 是有界可换 BCK- 代数. 相反地,如果 $\langle X;*,\theta,I\rangle$ 是有界可换 BCK- 代数,令

$x \to y = y * x,\ x^- = x \to 0,$

$x \vee y = (y \to x) \to x,$

$x \wedge y = (x^- \vee y^-)^-$,

$0 = I, 1 = \theta,$

则 $\langle X; \vee, \wedge, \to, ^-, 0, 1\rangle$ 是格蕴涵代数. 所以格蕴涵代数等价于有界可换 BCK- 代数. □

由定理 6.4.6 和 6.4.7 得

推论 6.4.9 MV- 代数,Wajsberg 代数,有界可换 BCK- 代数,格蕴涵代数彼此等价.

6.5 BCI- 代数和半群

BCI- 代数是 BCK- 代数的推广(去掉条件:$0 * x = 0$). T. D. Lei and C. C. Xi[1] 引入了 p- 半单 BCI- 代数,并证明了:p- 半单 BCI- 代数等价于 Abel 群. 比 p- 半单 BCI- 代数更特殊的一类 BCI- 代数是结合 BCI- 代数,是由 Q. P. Hu 和 K. Iséki[1] 提出的,它等价于对合群. K. Iséki[8] 还引入了具有条件(S) 的 BCI- 代数.

定义 6.5.1(K. Iséki[7]) (2,0) 型代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做 BCI- 代数,如果它满足:

(Ⅰ) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

(Ⅱ) $(x * (x * y)) * y = 0$

(Ⅲ) $x * x = 0$

(Ⅳ) $x * y = 0,\ y * x = 0$ 蕴涵 $x = y$.

注 6.5.1 在 K. Iséki 的原始定义中,还有条件

(Ⅴ)　$x * 0 = 0$ 蕴涵 $x = 0$.

H. Jiang 和 Z. P. Tian[1] 证明了,由(Ⅰ)~(Ⅳ)能够推出(Ⅴ).

沈伯英受到 M. W. Bounder 结果(见定理 6.1.1)启发,证明了下述结果.

定理 6.5.2(沈伯英[1])　(2,0) 型代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是 BCI- 代数当且仅当它满足:

B　$((x * y) * (z * y)) * (x * z) = 0$

C　$((x * y) * z) * ((x * z) * y) = 0$

I　$x * x = 0$

(Ⅳ)　$x * y = y * x = 0$ 蕴涵 $x = y$.　□

这里,公理 **I** 对应于组合逻辑中的组合子

I　$\vdash Fxx$

所以该定理说明,与组合子 **B**,**C**,**I** 对应的公理加上推理规则(Ⅳ)组成了 BCI- 代数的公理系统. 因此 BCI- 代数的名称来于组合逻辑. 事实上,在数理逻辑中就有 BCK- 系统和 BCI- 系统.

定义 6.5.2(Q. P. Hu and K. Iséki[1])　BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做结合的,如果

$$\forall\, x, y, z \in X,\ (x * y) * z = x * (y * z).$$

定理 6.5.3(Q. P. Hu and K. Iséki[1])　(2,0) 型代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 是结合 BCI- 代数当且仅当它是对合群,0 是零元.　□

定义 6.5.3(T. D. Lei and C. C. Xi[1])　BCI- 代数 $\langle X; *, 0\rangle$ 叫做 p- 半单的,如果 $\forall\, x \in X,\ x = 0 * (0 * x)$.

定理 6.5.4(T. D. Lei and C. C. Xi[1]) 假设$\langle X; *, 0\rangle$是p-半单 BCI-代数,令$x+y=x*(0*y)$,则$\langle X, +, 0\rangle$是 Abel 群,x的逆元为$0*x$.反之,如果$\langle X; +, 0\rangle$是一个 Abel 群,令$x*y=x-y$,则$\langle X; *, 0\rangle$是p-半单 BCI-代数.所以p-半单 BCI-代数和 Abel 群是等价的. □

定义 6.5.4(L. Fuchs[1]) 假设X是非空集,$\cdot$是X上的二元运算,1是X的一个常元,则$\langle X; \cdot, 1\rangle$叫做*可换幺半群*,如果它满足:

G1 $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

G2 $x\cdot y=y\cdot x$

G3 $x\cdot 1=x$.

进一步,如果$\langle X; \leqslant\rangle$是一个偏序集,满足

G4 $x\leqslant y$ 蕴涵 $x\cdot z\leqslant y\cdot z$

则$\langle X; \leqslant, \cdot, 1\rangle$叫做一个*偏序可换幺半群*.如果对任意$x, y\in X$,集$\{x\in X: x\cdot a\leqslant b\}$关于$\leqslant$有最大元,记为$a:b$,则$\langle X; \leqslant, :, \cdot, 1\rangle$叫做*剩余偏序可换幺半群*.

定理 6.5.5(J. Meng[11]) 如果一个剩余偏序可换幺半群的单位元是极大元,则它范畴等价于具有条件(S)的 BCI-代数. □

综上所述,我们得到结论:BCK-**代数和** BCI-**代数是处理各种逻辑代数的一个统一框架**.

参考文献

J. M. Abe and **K. Iséki**

1. *A survey on* BCK *and* BCI-*algebras*. Estudos e Pesquisas, IV, 1998, 98:1～021

J. C. Abbot

1. *Implication algebras*. Bull. Math. R. S. Roumania, 1967, 11(59):1.
2. *Semi-Boolean algebras*. Math. Vestik, 1967, 19:177～198.
3. *Sets, Lattices, and Boolean algebras*. Allyn and Bacon, Boston, MA, 1969.

H. A. S. Abujabal and **J. Meng**

1. *On (＊)-ideals and positive implicative ideals in* BCI-*algebras*. East Asian Math. J., 1997, 13:187～195.

M. Aslam and **A. B. Thaheem**

1. *A note on p-semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991, 36:39～45.
2. *On certain ideals in* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1991, 36:895～906.

R. Balbes and **Ph. Dwinger**

1. *Distributive Lattices*. University of Missouri Press, 1974.

R. Balbes and **A. Horn**

1. *Injective and projective Heyting algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, 148:549～559.

R. Barbacioru

1. *Positive implicative* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1993, 38:513～529.

L. P. Belluce

1. *Semisimple algebras of infinite valued logic and Bold fuzzy set theory*. Canada J. Math., 1986, 38:1356～1379.

S. A. Bhatti

1. *Closed-ness and open-ness of ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991,36:915～921.
2. *Strong ideals and quotient algebras of* BCI-*algebras*. J. of Nat. Sci. & Math., 1990,30:1～12.
3. *Obstnate ideals in* BCI-*algebras*. J. of Nat. Sci. & Math., 1990,30:21～31.

S. A. Bhatti and **M. A. Chaudhry**

1. *On weak mappings of ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990, 35:93～103.
2. *Annihilators and duality in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991, 36: 1025～1031.

S. A. Bhatti, **M. A. Chaudhry** and **B. Ahmad**

1. *On classification of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1989, 34: 163～170.

G. Birkhoff

1. *Lattice Theory*. Second edition. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.

G. Boole

1. *The mathematical analysis of logic*. 1847
2. *An investigation into the laws of thought*. London, 1854(reprinted by Open Court Publishing Co., Chicago, 1940).

M. W. Bounder

1. *Simpler axioms for* BCK-*algebras and the connection between the axioms and the combinators* **B**,**C**, *and* **K**. Math. Japon., 1981,26:415～418.
2. *Author's review* [*and correction*] *of M. W. Bounder and R. K. Meyer, A result for combinators*, BCK *logics and* BCK *algebras*, (*Logique et Analuse*, 1985, 28: 33～40). Zentralblatt für Mathematik and ihre Grenzgebiete, 574:10～11.

M. W. Bounder and **R. K. Meyer**

1. *A result for combinators*, BCK *logics and* BCK *algebras*. Logique et Analuse, 1985,28:33～40.

M. W. Chan and **K. P. Shum**

1. *Homomorphisms of implicative semigroups*. Semigroup Forum, 1993,46:7～15.

C. C. Chang

1. *Algebraic analysis on many value logic*. Trans. Amer. Math. Soc., 1958,88:467～490.
2. *A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms*. Trans. Amer. Math. Soc., 1959,93:74～80.

M. A. Chaudhry

1. *Weakly positvie implicative and Weakly implicative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990,35:141～151.
2. *Branchwise commutative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:163～170.
3. *On positive implicative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 2000,52:9～12.

M. A. Chaudhry and **B. Ahmad**

1. *On a class of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1988,33:827～830.

M. A. Chaudhry and **S. A. Bhatti**

1. *A note on p-semisimple* BCI-*algebras of order four*. Math. Japon., 1990,35:719～722.

F. Y. Chen Z. M. Chen and **Y. S. Huang**

1. *Semisimple* BCI-*algebraic structure*. Math. Japon., 1997,45:113～117.

陈昭木

1. BCK-代数和 BCI-代数. 福建师大讲义,1985.
2. 优 BCI-代数的直积. 福建师大学报,1987,3(2):17～28.
3. 关于半单优 BCI-代数. 福建师大学报,1988,4(2):1～6.
4. 优 BCI-代数的直和. 福建师大学报,1993,9(2):13～16.

Z. M. Chen(陈昭木) and **H. X. Wang(王华雄)**

1. *Some universal properties of* BCI-*algebras*. Kobe J. Math., 1989,6:

43～48.

2. *Closed ideals and congruences on* BCK-*algebras*. Kobe J. Math., 1991,8:1～9.

3. *On ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991,36:497～501.

4. *On simple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991,46:627～632.

Z. M. Chen and **Y. S. Huang**

1. *Idempotent element rings*. Math. Japon., 1993,38:995～1000.

2. *Additive decomposition of* BCI-*algebras with condition* (*S*). Math. Japon., 1995,41:303～310.

H. B. Curry

1. *Foundations of Mathematics logics*. McGraw-Hill, New York, 1963.

E. Y. Deeba and **S. K. Goel**

1. *A note on* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1988,33:517～522.

A. Diego

1. *Sur les algebras de Hilbert*. Collection de Logique Math., Serie A, 1966,**XXI**,1～52.

W. A. Dudek

1. *On medial* BCI-*algebras*. Prace Naukowe WSP w Czetochwle, ser. Matematyka 1985,1,(in print).

2. *On some* BCI-*algebras with the condition* (S). Math. Japon., 1988, 31:25～29.

I. Fleischer

1. *Every* BCK-*algebra is a set of residuables in an integral pomonoid*. J. Algebra, 1988,119:360～365.

J. M. Front, **A. J. Rodriques** and **A. Torrens**

1. *Wajsberg algebras*. Stochstica, 1984,8:5～31.

L. Fuchs

1. *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press, 1963.

S. K. Goel

1. *Characterization of* BCI-*algebras of order four*. Math. Japon., 1988,33:677～686.

S. K. Goel and **A. K. Arora**

1. *Left permutable* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:863～869.

G. Grätzer

1. *General Lattice Theory*. Academic Press,INC., New York, 1978.

G. F. C. Griss

1. *Logic of negationless intuitionistic mathematics*. Indag. Math.,1951, 13:3～11.

T. Y. Guo

1. *The structure of a class of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:703～711.

S. M. Hong, Y. B. Jun and **J. Meng**

1. *On strong ideals and p-ideals in* BCI-*algebras*. Math. Scientiae Math., 1998,1:177～180.

S. M. Hong, Y. B. Jun and **E. H. Roh**

1. *k-nil radical in* BCI-*algebras*. Far East J. Math. Sci., 1997,5:237～242.

S. M. Hong and **X. L. Xin**

1. *A note on k-Nil ideals in* BCI-*algebras*. Bull. Korean Math. Soc., 1997,34:205～209.

C. S. Hoo

1. BCI-*algebras with condition* (S). Math. Japon., 1987,32:749～756.
2. *A survey of* BCK *and* BCI-*algebras*. Southeast Asian Bull. Math., 1988,12:1～9.
3. *Injectives in the categories of* BCK *and* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1988,33:237～246.
4. *Free and injective* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1988,33:523～528.
5. MV-*algebras, ideals and semisimplicity*. Math. Japon., 1989,34:563～583.
6. *Closed ideals and p-semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990, 35:1103～1112.
7. *Filters and ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991,36:987～

997.

C. S. Hoo and **Y. B. Jun**

1. *Essential ideals and homomorphisms in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:597～602.
2. *p-projective* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:841～847.
3. *Strong p-projective* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993, 38: 857～862.
4. *Exact sequence in* BCI-*algebras*. (*submitted*).

C. S. Hoo and **P. V. R. Murty**

1. *A note on associative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1987,32:53～55.
2. *Quasi-commtative p-semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1987, 32:889～894.

C. S. Hoo and **H. X. Wang**

1. *Extensions of* MV, BCI *and* BCK-*algebras*. Southeast Asian Bull. Math., 1994,18(1):47～53.

胡庆平

1. BCI-代数. 陕西科学技术出版社,1987 年

Q. P. Hu(胡庆平) and **K. Iséki(井关清志)**

1. *On* BCI-*algebras satisfying* $(x*y)*z=x*(y*z)$. Math. Seminar Notes, 1980,8:553～555.
2. 可结合的 BCI-代数. 科学通报, 1982,12:714～716.
3. *On some classes of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1984,29:251～253.

黄　涵,章仲英

1. 对称 BCI-代数类是一个 BCI-代数簇的充要条件. 宁夏大学学报(自然科学版),1984,1:6～10.

W. P. Huang(黄文平)

1. *On the p-semisimple part in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37: 159～161.
2. *Nil-radical in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:363～366.
3. *On* BCI-*algebras in which every subalgebra is an ideal*. Math. Japon., 1992,37:645～647.

4. 关于 BCI-代数的半群理论. 纯粹数学与应用数学，增刊，9:28～34.

5. *On* BCI-*algebras and semigroups*. Math. Japon.，1995，42:59～64.

Y. S. Huang

1. *Characterization of implicative* BCI-*algebras*. Soochow J. Math.，1999，25:375～386.

2. *Notes of commutative* BCI-*algebras*. 纯粹数学与应用数学，1999，15(3):27～32.

3. *Answers to J. Meng open problem*. (*submitted*).

Y. S. Huang and **Z. M. Chen**

1. *On ideals in* BCK-*algebras*. Math. Japon.，1999，50:211～226.

Y. Imai and **K. Iséki**

1. *On axiom systems of propositional calculi*，XIV. Proc. Japan Acad.，1966，42:19～22.

Y. Irai

1. *Axiom systems of propositional calculi*，Ⅰ. Proc. Japan Acad.，1965，41:570～574.

Y. Irai and **K. Iséki**

1. *Axiom systems of propositional calculi*，Ⅵ. Proc. Japan Acad.，1965，41:667～669.

K. Iséki

1. *Algebraic formulations of propositional calculi*. Proc. Japan Acad.，1965，41:803～807.

2. *An algebra related with a propositional calculus*. Proc. Japan Acad.，1966，42:26～29.

3. *On a positive implicative* BCK-*algebra with the condition* (S). Math. Seminar Notes，1977，5:227～232.

4. *On bounded positive implicative* BCK-*algebra with the condition* (S). Math. Seminar Notes，1977，5:239～244.

5. *On implicative* BCK-*algebra with the condition* (S). Math. Seminar Notes，1977，5:249～253.

6. BCK-*algebra with the condition* (S). Math. Japon.，1979，24:107～

119.

7. *On* BCI-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1980,8:125～130.

8. *On* BCI-*algebras with condition* (S). Math. Seminar Notes, 1980,8: 171～172.

9. *On the existence of quasicommutative* BCI-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1980,8:181～186.

10. *A variety of* BCI-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1980,8:225～226.

11. *Some examples of* BCI-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1980,8:237～240.

12. *A note on the variety of* BCI-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1980, 8:509～511.

13. *A way to* BCK-*algebras and related systems*. Math. Japon., 2000, 52:163～170.

K. Iséki and **S. Tanaka**

1. *Ideal theory of* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1976,21:351～366.

2. *An introduction to the theory of* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1978, 23:1～26.

K. Iséki and **A. B. Thaheem**

1. *Note on* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1984,29:255～258.

H. Jiang

1. *A type of finite proper* BCI-*algebras*. J. of Hangzhou Univ. (Nat. Sci. Edi.), 1988,15(1):388～395.

2. *Computational methods in the study of finite* BCK-*algebras with low orders*. Kobe J. Math., 1990,7(1):33～46.

3. *Atlas on proper* BCI-*algebras of order* $n \leqslant 5$. Math. Japon., 1993, 38:589～591.

4. *A note on proper* BCI-*algebras of order four*. Southeast Asian Bull. Math., 1994,18:55～58.

5. *Remarks on regular* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996,44:539～540.

H. Jiang and **G. J. Zhang**

1. *Amendment to Huang's paper*. Math. Japon., 2000,51:255～258.

姜豪,田正平

1. BCK-代数和 BCI-代数公理系统的独立性. 杭州师范学院学报, 1985,2:23～26.

Y. B. Jun

1. *Studies on* BCK-*algebras and* BCI-*algebras*. Ph. D. Thesis, Kyung Hee Univ. 1987.
2. *A note on nil ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:1017～1021.

Y. B. Jun, **S. M. Hong** and **E. H. Roh**

1. *k-nil radical in* BCI-*algebras*. Comm. Korean Math. Soc., 1997,12: 499～505.

Y. B. Jun and **J. Meng**

1. *On Hom* (～,～) *as* BCI-*algebras*. Kyungpook Math. J., 1995,35: 103～110.

Y. B. Jun, **J. Meng** and **E. H. Roh**

1. *On nil ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:1051～1056.
2. *Ideals in* BCI-*algebras. submitted.*

Y. B. Jun, **J. Meng** and **S. M. Wei**

1. *A note on Hom* (～,～) *as* BCI-*algebras*. Comm. Korean Math. Soc., 1993,8(1):103～110.

Y. B. Jun and **E. H. Roh**

1. *Characterizations of commutative* BCI-*algebras*. Honam Math. J., 1993,15:55～58.
2. *On the* BCI-*G part on* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:697～702.
3. *Nil ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1995,41:297～302.
4. *Nil ideals in* BCI-*algebras*(Ⅱ). Math. Japon., 1995,41:553～556.

Y. B. Jun, **E. H. Roh** and **J. Meng**

1. *Annihilators in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996,43:559～562.

H. M. Karanda

1. *Some properties of* BCI-*quasigroups*. Math. Japon., 2000, 52: 83～87.

R. Kashima and **Y. Komori**

1. *The word problem for free* BCI-*algebras is decidable*. Math. Japon., 1992, 37: 1025～1029.

Y. Komori

1. *The separation theorem of the* χ_0-*valued Lukasiewicz propositional logic*. Reports Fac. Sci., Shizuoka Univ., 1978, 12: 1～5.

M. Kondo

1. *Annihilators in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996, 43: 559～562.
2. *Conditions for* $L(X)$ *to be an ideal in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1997, 46: 237～239.
3. *Duality theorem for* p-*semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1997, 46: 497～501.
4. *Note on the* BCI-*G part of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1998, 48: 349～352.
5. *Annihilators in* BCK-*algebras*. Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B: Math. Sci., 1998, 31: 21～25.
6. *Hilbert algebras are dual isomorphic to positive implicative* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1999, 49: 265～268.
7. *Annihilators in* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1999, 49: 407～410.
8. (H)-*Hilbert algebras are same as Hertz algebras*. Math. Japon., 1999, 50: 195～200.
9. *On* (＊)-*ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1999, 50: 201～205.

雷天德(**T. D. Lei**)

1. 有限结合 BCI-代数. 陕西师大学报(理科版), 1982, 17～20.
2. 广义结合 BCI-代数. 纯粹数学与应用数学, 试刊号(1985), 98～102.
3. BCI-代数的 p-根性及其重要性质. 陕西师大学报(理科版), 1983, 2: 30～36.
4. BCI-代数讲义. 陕西师大数学系, 1984.

5. *p-radical and its basic properties of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1985,30:753～756.

雷天德,蒲义书

1. BCK-代数与 BCI-代数. 汉中师院,1983.

T. D. Lei and **C. C. Xi**

1. *p-radical in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1985,30:511～517.

李　丹

1. 有界 BCK-代数的几点注记. BCK-代数和 BCI-代数会议上的报告,1983 年 4 月,西安.

H. S. Li(李会师)

1. *An axiom system of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1985,30:351～352.

刘大宏

1. BCI-代数的有界性,交换性及关联性. 西安石油学院学报,1986,1(1):127～132.

F. Liu(刘方) and **W. P. Huang**

1. *On obstinate ideals of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:79～81.
2. *A note on weakly implicative ideal*. J. Math. Research & Exposition, 1996,15:366.

Y. L. Liu and **D. H. Lin**

1. *Some results on simple* BCI-*algebras*. J. Math. Study, 1997,28(1):94～99.

Y. L. Liu and **J. Meng**

1. *Implicative ideals of* BCI-*algebras*. (*submitted*).

Y. L. Liu, **J. Meng**, **X. H. Zhang** and **Z. C. Yue(岳振才)**

1. *q-ideals and a-ideals in* BCI-*algebras*. Southeast Asian Bull. Math., 2000,24:243～253.

刘用麟,张小红

1. 弱正定关联 BCI-代数的刻划. 汉中师院学报(自然科学版),1994,1:4～8.

刘用麟,张小红,岳振才

1. 关于 BCI-代数的拟结合理想. 数学记事, 1993,26(2):87～92.

M. X. Luo and **Y. F. Zhou**

1. *On the* BCI-*G part in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996,44:363～366.

J. Meng(**孟　杰**)

1. BCK-代数的理想. 纯粹数学与应用数学, 1986,2:68～76.
2. 可换 BCK-代数的一个特征. 郴州师专学报(自然科学版), 1988,1:45～50.
3. BCK-代数的理想(Ⅲ). 纯粹数学与应用数学, 1990,6(2):33～37.
4. BCK-代数的可换理想. 纯粹数学与应用数学, 1991,7(2):49～53.
5. BCK-代数的理想(Ⅳ). 纯粹数学与应用数学, 1994,10(2):13～18.
6. *An ideal characterization of commutative* BCI-*algebras*. Pusan Kyongnam Math. J., 1993,9:1～6.
7. *Powers of elements and subalgebras in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1994,39:437～446.
8. *On ideals in* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1994,39:143～154.
9. *Implicative commutative semigroups are equivalent to a class of* BCK-*algebras*. Semigroup Forum, 1995,25(1):89～96.
10. *Implication algebras are equivalent to implicative* BCK-*algebras*. Soochow J. Math., 1996,22:567～571.
11. *On commutative residual pomonoids*, Demonstratio Math., 1998. XXXI(1):11～17.

J. Meng and **H. A. S. Abujabal**

1. *On closed ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996,44:499～505.

J. Meng and **Y. B. Jun**

1. *Notes on medial* BCI-*algebras*. Comm. Korean Math. Soc., 1993,8:33～37.
2. *A 2-base of the variety of quasi-commutative* BCI-*algebras*. Indian J. Pure Appl. Math., 1994,25:693～697.
3. BCK-*algebras*. Kyung Moon Sa Co., Seoul, Korea, 1994.
4. *Atomatic extensions of* BCK-*algebras to proper* BCI-*algebras*. Math.

Japon., 1996,43:313～315.

J. Meng, Y. B. Jun and **S. M. Hong**

1. *Implicative semilattices are equivalent to positive implicative* BCK-*algebras with condition* (S). Math. Japon., 1998,48:251～255.

J. Meng, Y. B. Jun and **E. H. Roh**

1. *On a problem of G-part of* BCI-*algebras*. Pusan Kyongnam Math. J., 1994,8(1):9～19.
2. *The role of B(X) and L(X) in the ideal theory of* BCI-*algebras*. Indian J. Pure Appl. Math., 1997,28:741～752.
3. BCI-*algebras of order* 6. Math. Japon., 1998,47:33～43.

J. Meng, Y. B. Jun and **X. L. Xin**

1. *On* BCI-*algebras with condition (S)*. *Scientiae* Math., 2000,3:427～434

J. Meng and **S. M. Wei**

1. *Periods of elements in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1993,38:427～431.
2. *Periodic* BCI-*algebras and closed ideals*. Math. Japon., 1993,38:571～575.

J. Meng, S. M. Wei and **Y. B. Jun**

1. *Characteizations on KL-product* BCI-*algebras*. Pusan Kyongnam Math. J., 1992,8(1):49～53.
2. *Normal* BCI/BCK-*algebras*. Comm. Korean Math. Soc., 1994,9:285～270.

J. Meng and **X. L. Xin(辛小龙)**

1. *Characteizations of atoms of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:359～361.
2. *Commutative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:568～572.
3. *A problem in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1992,37:723～725.
4. 关联 BCI-代数. 纯粹数学与应用数学, 1992,8(2):99～103.
5. 正定关联 BCI-代数. 纯粹数学与应用数学, 1993,9(1):19～22.

D. J. Meng(孟道骥)

1. BCI-*algebras and Abelian groups*. Math. Japon., 1987, 32: 693～696.

C. A. Meredith and **A. N. Prior**

1. *Notes on the axiomatics of propositional calculus*. Notre Dame Journal of formal logical, 1963, 4: 171～187.

D. Mundici

1. MV-*algebras are categorically equivalent to bounded commutative* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1986, 31: 889～894.

P. V. R. Murty

1. *Semi-Brouwerian algebras*. J. Austrial Math. Soc., 1974, 18: 293～302.

W. C. Nemits

1. *Implicative semilattices*. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 117: 128～142.

W. C. Nemits and **T. Whaley**

1. *Varietis of implicative semilattices*. Pacific J. Math., 1971, 37: 759～769.

M. Palasinski

1. *On ideals and congruence lattices of* BCK-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1981, 9: 441～443.

蒲义书

1. 关于广义结合 BCI-代数的等价公理系. 陕西师大学报(理科版), 1984, 2: 30～32.

A. J. Rodriguez

1. *Un estudio algebraico de calculos proposicionales de Lukasiewicz*. Thesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1980.

E. H. Roh

1. *On (fuzzy) ideals in* BCK/BCI-*algebras*. Ph. D. Thesis, Gyeongsang National Univ. 1996.

E. H. Roh and **Y. S. Huang**

1. *J-semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1999, 49: 213～216.

E. H. Roh, Y. B. Jun and **S. M. Wei**

1. *Some ideals in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1996, 43: 47～50.

D. J. Sun

1. *On self-homomorphisms of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 2000, 51: 419～422.

D. J. Sun(孙大军) and **W. P. Huang**

1. *On torsion part in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1999, 50: 115～119.

沈百英

1. 与组合子有关的代数的新系统. 南京大学学报(理科版), 1983, 4: 616～619.

M. H. Stone

1. *Applications of the theory of Boolean rings to topology*. Trans. Amer. Math. Soc., 1937, 41: 375～481.

Z. S. Tan

1. *On finite regular* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991, 36: 803～810.

S. Tanaka

1. *On* $\wedge$*-commutative* BCK-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1975, 3: 37～43.
2. *A new class of algebras*. Math. Seminar Notes, 1975, 3: 45～54.

T. Traczyk

1. *On the variety of bounded commutative* BCK-*algebras*. Math. Japon., 1979, 24: 283～292.

H. X. Wang

1. *Injective in* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990, 35: 797～798.

Y. Q. Wang

1. *Isomorphic theorems on* $X/Q(X)$. Math. Japon., 1992, 37: 341～347.

S. M. Wei, Y. B. Jun and **J. Meng**

1. *p-semisimple unoins of* BCI-*algebras*. Southeast Asian Bull. Math., 1992, 20(4): 63～71.

魏仕民(S. M. Wei)

1. 拟关联 BCI-代数. 南昌大学学报(理科版), 1995(增刊), 19: 61～65.

2. BCI-代数的 *KI* 并代数. 纯粹数学与应用数学，1994,10(1):33～36.

S. M. Wei, G. Q. Bai, J. Meng and **Y. Q. Wang**

1. *Quasi-implicative* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1999,50:227～233.

S. M. Wei and **Y. B. Jun**

1. *Decompositions of ideals in* BCI-*algebras*. Comm. Korean Math. Soc., 1994,9:275～278.

S. M. Wei, Y. B. Jun and **J. Meng**

1. *p-semisimple unions of* BCI-*algebras*. Southeast Asian Bull. Math., 1996,20(4):63～71.

S. M. Wei, Y. B. Jun and **E. H. Roh**

1. *On Some ideals in* BCI-*algebras*. Scientiae Math., 1998,1:365～371.

魏仕民,孟　杰

1. 关于弱关联 BCI-代数. 淮北煤师院学报，1995,15(2):16～19.

魏仕民,赵树濂

1. BCI-代数的理想格. 淮北煤师院学报，1993,14(3):1～4.

A. Wronski

1. BCK-*algebras do not form a variety*. Math. Japon., 1983,28:211～213.

吴望名

1. *Fuzzy* 蕴涵代数. 模糊系统与数学,1990,1:56～63.

C. C. Xi

1. *On a class of* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990,35:13～17.

X. L. Xin

1. *Structural theories on* BCK/BCI-*algebras*. Ph. D. Thesis Gyeongsang National Univ. 1999.

徐　扬

1. 格蕴涵代数. 西南交通大学学报,1993,1:20～27.

H. Yutani

1. *On a system of axioms of commutative* BCK-*algebras*. Math. Seminar Notes, 1977,5:255～256.

2. *An axiom system for* BCK-*algebras with condition* (S). Math. Seminar Notes, 1979,7:427～432.

3. *Quasicommutative* BCK-*algebras and congruence relations*. Math. Seminar Notes, 1977,5:,1990,35:467～480.

4. *Colimits in the category of* BCK-*algebras* . Math. Japon. , 1985,30: 527～534.

张小红

1. BCI-代数的一条新性质及同态定理. 汉中师院学报(自然科学版), 1990,2:10～12.

X. H. Zhang(张小红),H. Jiang(姜　豪) and **S. A. Bhatti**

1. *On p-ideals of a* BCI-*algebra*. Punjab Univ. J. Math. , 1994,**XXVII**: 121～128.

张小红,凌瑞官

1. BCI-代数的结合理想. 湖州师专学报, 1985,5:45～52.

张小红,章仲英

1. *T* 型 BCI-代数. 徐州师院学报(自然科学版), 1989,7(1):16～21.

章仲英

1. 对称 BCI-代数. 徐州师院数学系 1983 年度论文集.

2. 对称 BCI-代数及其自同态. 徐州师院学报(自然科学版),1984,1:16～21.

3. 刻划对称 BCI-代数的基本等式. 汉中师院学报,1985,1:26～28.

Q. Zhang

1. *Some endomorphisms of* BCI-*algebras*. Math. Japon. , 1991,36:503～506.

2. *A clutching in the* BCI *category*. Math. Japon. , 1991,36:811～814.

3. *Some other characterizations of p-semisimple* BCI-*algebras*. Math. Japon. , 1991,36:815～817.

4. *On branches of* BCI-*algebras*. Math. Japon. , 1991,36:1015～1019.

5. BCI-*algebras with weak units*. Math. Japon. , 1991,36:1163～1166.

6. *A Lagrange's theorem for* BCI-*algebras*. Math. Japon. , 1993,38:391～395.

7. *An answer for J. Meng's problem about* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1994,39:177～178.

8. *On Aslam's problem about* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1990,35:179～184.

Y. Q. Zhu(朱怡权)

1. *Solvable* BCI-*algebras*. Math. Japon., 1991,36:971～976.

2. BCI-代数的正规理想. 黄冈师专学报(自然科学版), 1992,12(3):5～8.

3. 关于格蕴涵代数和BCK-代数. 纯粹数学与应用数学,1999,15(3):22～26.

名词索引

六画

七画

十画

十一画

符号索引